# Diferenciální rovnice

## Obyčejné rovnice prvního řádu

Petr Liška

Masarykova univerzita

08.11.2024

## Ponziho schéma

Předpokládejme, že máme na začátku 10 investorů, přičemž každý vloží do fondu 100 000 Kč a je mu slíbena 20 % návratnost investice každý měsíc. Z vloženého milionu tak vyplatíme každému investorovi 20 000 Kč a zbylých 800 000 Kč si necháme. Označme $y$ počet investorů, které potřebujeme, abychom mohli investory nadále vyplácet a přitom si pokaždé nechat částku 800 000 Kč.

*Řešení:* Budeme-li částky uvažovat v tisících, pak máme

$$\begin{aligned} \text{příjem} &= 100\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \text{výdej} &= 20y + 800. \end{aligned}$$

$$100\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 20y + 800.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}2y + 8.$$

## Logistický růst

Předpokládejme, že rychlost růstu nějaké populace je přímo úměrná její velikosti. Je-li $t$ čas a $P$ je počet jedinců v populaci v čase $t$, dostaneme pro rychlost růstu populace

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP, \qquad k > 0.$$

Mnoho populací se začne rozrůstat exponenciálně, ale jakmile se počet jedinců přiblíží nosné kapacitě $K$ prostředí růst se zpomalí, případně velikost populace začne klesat, pokud její velikost tuto hodnotu překročí. Pro tento model máme tedy následující předpoklady:

- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx kP$ pro malá $P$, tj. ze začátku populace roste přímo úměrně svojí velikosti,
- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} < 0$, jestliže $P > K$, tj. velikost populace se zmenšuje, jestliže počet jedinců přesáhne kapacitu prostředí.

*Řešení:*

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

# Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

## Definice

Nechť je dána otevřená souvislá podmnožina $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon G \to \mathbb{R}$, pak obyčejnou *diferenciální rovnicí prvního řádu* nazveme rovnici ve tvaru

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

*Řešením* rovnice (1) rozumíme každou funkci $\varphi$, která je diferencovatelná na nějakém otevřeném intervalu $I$, a pro kterou platí

$$y' = f(x, \varphi(x)), \qquad \text{kde } x \in I.$$

Je-li $[x_0, y_0] \in G \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\varphi$ je řešením (1). Pak úlohu najít řešení této rovnice, pro které platí $\varphi(x_0) = y_0$, nazveme *počáteční úlohou* a bod $[x_0, y_0]$ *počáteční podmínkou. Obecným řešením* rovnice je pak funkce $\varphi$ závislá na jednom parametru $c$, jehož určitou volbou obdržíme všechna řešení zadané rovnice. *Partikulárním řešením* $y_p$ rozumíme jedno konkrétní řešení, které získáme konkrétní volbou parametru $c$.

# Rovnice se separovatelnými proměnnými

$$y' = f(x) \cdot g(y), \qquad\qquad f,\ g \in C(I)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \cdot g(y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{! konstantní řešení } g(y) = 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

# Lineární diferenciální rovnice

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad\qquad p, q \in C(I)$$

Rovnici vynásobíme tzv. *integrační faktorem*

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

čímž dostaneme

$$y'\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} + p(x)y\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

ale všimneme si, že

$$\left(y\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

a odtud už snadno

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

# Lineární rovnice

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Je-li $q(x) \equiv 0$ mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici.

Zavedeme tzv. *operátorovou* symboliku

$$L[y](x) = y'(x) + p(x)y\,.$$

Operátor $L$ je lineární, tj.

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]\,.$$

pro libovolné $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ a $y_1,\ y_2 \in C^1(a,b)$.

# Princip superpozice

## Věta

*Nechť*

$$y_1 \text{ je řešením rovnice } y' + p(x)y = q_1(x)$$
$$y_2 \text{ je řešením rovnice } y' + p(x)y = q_2(x).$$

*Pak funkce*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

*je řešením rovnice*

$$y' + p(x)y = c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x)$$

*pro libovolné* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

# Důsledky

1. Je-li funkce $y_0$ řešením HLDR, tak i $cy_0$, $c \in \mathbb{R}$ je řešením.
2. Je-li funkce $y_p$ řešení LDR a $y_0$ je řešení příslušné HLDR, pak funkce $y = y_0 + y_p$ je řešení LDR.
3. Jsou-li funkce $y_1$, $y_2$ dvě různá řešení LDR, pak $y = c(y_1 - y_2)$ je obecné řešení příslušné HLDR.

**Věta**

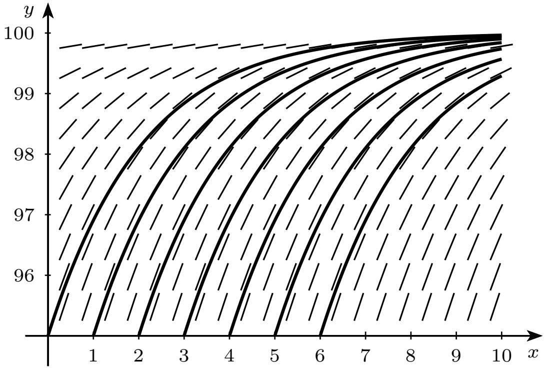
*Je-li $y_p$ libovolné partikulární řešení LDR a $y_0$ obecné řešení příslušné HLDR, pak funkce*

$$y = y_0 + y_p$$

*je obecným řešením LDR.*

# Geometrický význam

$$y' = f(x, y),$$




Směrové pole rovnice $y' = \frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{100}y\right)$ a řešení pro různé počáteční podmínky

# Eulerova metoda

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 \\
y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \\
y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \\
&\vdots \\
y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

# Vylepšená Eulerova metoda

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_n + h, y_k + hf(x_n, y_n)\right)\right]$$

# Runge-Kutta (druhého řádu)

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right)_{x_n, y_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n))$$