Diferenciální rovnice prvního řádu

Homogenní, Bernoulliova
Existence a jednoznačnost

Petr Liška

Masarykova univerzita

15.11.2024

Homogenní rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Zavedeme substituci $\frac{y}{x} = u$, tj.

$$y = u \cdot x \qquad \Longrightarrow \qquad y' = u' \cdot x + u\,.$$

Tím dostaneme rovnici se separovatelnými proměnnými

$$u'x + u = f(u)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Bernoulliova rovnice

Definice

Nechť $p(x), q(x)$ jsou spojité funkce na nějakém otevřeném intervalu I a nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pak diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru:

$$y' + p(x)y = q(x)y^r$$

nazýváme *Bernoulliovou rovnicí.*

Substituce

$$u = y^{1-r}$$

převede Bernoulliovu rovnici na lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

Picard-Lindelöfova věta (1890-1893)

Věta

Nechť je dána množina

$$R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. *Předpokládejme, že* $f\colon R \to \mathbb{R}$ *je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné* y, *tj.* $\exists\, L \in \mathbb{R}_0^+$ *takové, že*

$$\forall\, [x, y_1], [x, y_2] \in R \text{ platí, že } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|\,.$$

Pak existuje právě jedno řešení Cauchyho úlohy

$$y' = f(x, y), \qquad\qquad y(x_0) = y_0,$$

které je definované na intervalu $I = \langle x_0, x_0 + \delta\rangle$, *kde* $\delta = \min\{a, \frac{b}{m}\}$ *pro* $m = \max\limits_{[x,y] \in R} |f(x, y)|$.

Věta (**Peanova**)

Nechť je dána množina

$$R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. *Dále mějme funkci* $f\colon R \to \mathbb{R}$, *která je spojitá na* R. *Pak existuje řešení Cauchyho úlohy*

$$y' = f(x, y), \qquad\qquad y(x_0) = y_0,$$

které je definované na intervalu $I = \langle x_0, x_0 + \delta\rangle$, *kde* $\delta = \min\{a, \frac{b}{m}\}$ *pro* $m = \max\limits_{[x,y] \in R} |f(x, y)|$.

TL;DR

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

- Je-li f spojitá v okolí $[x_0, y_0]$ pak má (1) řešení v okolí x_0.
- Je-li f spojitá a lipschitzovská vzhledem k y v okolí $[x_0, y_0]$, pak má (1) právě jedno řešení v okolí x_0.