Diferenciální rovnice druhého řádu

Hlavně homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Petr Liška

Masarykova univerzita

29.11.2024

Definice

Nechť $p(x), q(x), r(x)$ jsou spojité funkce na nějakém otevřeném intervalu I. Rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1}$$

nazýváme *lineární diferenciální rovnicí druhého řádu*. Navíc, je-li $r(x) \equiv 0$, jedná se o *homogenní* lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Řešením nazveme každou funkci φ, která má na intervalu I spojité derivace prvního i druhého řádu a po dosazení do (1) přejde v identitu.

Úloha nalézt řešení rovnice (1), které splňuje v bodě $x_0 \in I$ *počáteční podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad y_0, y_1 \in \mathbb{R},$$

se nazývá *počáteční (Cauchyova) úloha*.

Věta o existenci a jednoznačnosti

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

Věta

Nechť jsou funkce $p(x), q(x)$ spojité na nějakém otevřeném intervalu I. Pak existuje právě jedno řešení rovnice (2), které je definované na I a splňuje počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, kde $x_0 \in I$.

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

Lemma

1. $$L[cy](x) = cL[y](x), \qquad c \in \mathbb{R}$$
2. $$L[y_1 + y_2](x) = L[y_1](x) + L[y_2](x)$$

Věta

1. *Je-li* y_p *partikulárním řešením rovnice* (2), *pak je i* $c \cdot y_p$ *pro* $c \in \mathbb{R}$ *partikulárním řešením této rovnice.*
2. *Jsou-li* y_1, y_2 *partikulární řešení rovnice* (2), *pak i jejich libovolná lineární kombinace* $c_1y_1 + c_2y_2$ *je řešením pro* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Wronskián

Věta

Mějme dvě partikulární řešení y_1, y_2 HLDR druhého řádu, která jsou definovaná na intervalu I. Jestliže

$$\mathcal{W}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall\, x \in I,$$

pak $y_o = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je obecným řešením příslušné HLDR druhého řádu, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Definice

Determinant $\mathcal{W}(y_1, y_2)$ nazýváme *wronskián funkcí* y_1, y_2. Jestliže $\mathcal{W}(y_1, y_2) \neq 0$, pak řešení y_1 a y_2 tvoří tzv. *fundamentální systém řešení HLDR druhého řádu.*

Lineárně nezávislá řešení

Definice

Funkce y_1, y_2 se nazývají *lineárně závislé* na intervalu I, jestliže existuje reálné číslo K, pro které platí

$$y_1 = K \cdot y_2 \qquad \forall\, x \in I.$$

V opačném případě řekneme, že funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé.

Věta

Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé na nějakém intervalu I, právě tehdy když $\mathcal{W}(y_1, y_2) \neq 0$ na intervalu I.

Věta

Jsou-li y_1, y_2 lineárně nezávislá řešení HLDR druhého řádu, pak platí, že $y_o = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je obecným řešením téže rovnice.

Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Uvážíme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0.$$

V závislosti na řešení charakteristické rovnice jsou možné tři případy:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ potom obecné řešení (3) je
$$y_o = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\,.$$
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ potom obecné řešení (3) je
$$y_o = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 x \mathrm{e}^{\lambda x}\,.$$
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_{12} = \alpha + \beta i$ potom obecné řešení (3) je
$$y_o = c_1 \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x + c_2 \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x\,.$$