Matematická analýza 3
Druhé cvičení

Příklad 1: Určete vzdálenost bodů $[1, 2]$ a $[3, 4]$ v euklidovské, součtové a maximální metrice. Nakreslete ilustrační obrázky.

Příklad 2: Určete vzdálenost funkcí

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$;

b) $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$

v metrice stejnoměrné konvergence a integrální metrice.

Příklad 3: Nechť l_k je množina všech posloupností reálných čísel délky k. Dále nechť $\varrho\colon l_k \times l_k \to \mathbb{N}$ je zobrazení dané předpisem

$$\varrho(p, q) = |\{n \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid p(n) \neq q(n)\}| .$$

Rozhodněte, zda je ϱ metrika na l_k.

Příklad 4: Nechť $P = \mathbb{R}^2$. Pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2] \in P$ definujeme tzv. pampeliškovou metriku

$$\varrho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} & \text{Body } A \text{ a } B \text{ leží na stejné polopřímce jdoucí počátkem.} \\ \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} & \text{V opačném případě.} \end{cases}$$

Určete vzdálenost bodů A a B a bodů A a C, kde $A = [2, 4]$, $B = [-3, 2]$ a $C = [1, 2]$. Popište, jak v této metrice vypadají kružnice.

Příklad 5: V euklidovské, součtové a maximální metrice určete vzdálenost:

a) bodu $P = [1, 1]$ od přímky $y = -x$;

b) přímky $y = c$ od paraboly $y = x^2 - 2x + 1$.

Příklad 6: V euklidovské metrice určete vzdálenost bodu $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$ od množiny

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \sqrt{|x|^3}\right\}.$$

Příklad 7: V integrální metrice určete průměr množiny

$$M = \{f(x) = x^n,\ x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}\} .$$