Matematická analýza 3
Třetí cvičení

Příklad 1: Nechť $A = [0,1] \cup (2,3) \cup 4$. Určete v $\mathbb{E}^1$ množiny $\bar{A}$, A° a $h(A)$.

Příklad 2: Udejte příklad množiny $A \subset \mathbb{R}$ takové, že v $\mathbb{E}^1$ jsou množiny $\bar{A}$, A°, A, $(\bar{A})^\circ$, $\overline{A^\circ}$ navzájem různé.

Příklad 3: Dokažte, že diferencovatelná funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{E}^1$ je kontrakce (lipschitzovská), právě když

$$|f'(x)| < 1 \ (\infty) \quad \text{pro všechna} \quad x \in [a,b]\,.$$

Následně rozhodněte, zda následující funkce jsou lipschitzovské (kontrakce):

a) $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{E}^1$;

b) $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{E}^1$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$.

Příklad 4: Ukažte, za jakých předpokladů je zobrazení $F\colon C[a,b] \to \mathbb{E}^1$ dané předpisem

$$F(f) = 1 - 2\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

kontrakcí.

Příklad 5: Dokažte, že rovnice

$$x^4 + x - 1 = 0$$

má právě jedno kladné řešení na intervalu $[0,1]$ a toto řešení zkuste nalézt.

Příklad 6: Dokažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + 1 \\ y &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y - 2 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení.