Matematická analýza 3
Páté cvičení

Příklad 1: Vypočítejte parciální derivace druhého řádu funkcí

a) $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$;

b) $f(x,y) = xye^y$;

c) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$;

d) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

f) $f(x,y) = x^{x+y}$;

g) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$;

h) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Příklad 2: Uvažujte funkci $u(x,y)$ pomocí které se snažíme měřit well-being společnosti v závislosti na velikosti x hrubého národního produktu a velikost y znečištění ovzduší.

a) Jaký je význam parciálních derivací $u'_x(x,y)$ a $u'_y(x,y)$? Jaké očekáváte jejich znaménko?

b) Jaká je interpretace parciální derivace druhého řádu u''_{xy}? Obvykle se v tomto případě předpokládá, že $u''_{xy} < 0$. Co to znamená?

c) Navíc obvykle platí, že funkce u má spojité parciální derivace druhého řádu, tedy $u''_{xy} = u''_{yx}$. Co nám pak u''_{yx} říká o funkci f, když snížíme znečištění?

Příklad 3: Určete gradient funkce

a) $f(x,y) = y\ln x$;

b) $f(x,y) = xe^{2xy}$.

Příklad 4: Určete tečnou rovinu ke grafu funkce v daném bodě

a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $[1,1,?]$;

b) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $[0,0,?]$.

Příklad 5: Určete, zda-li existuje kmenová funkce. Tuto funkci případně najděte.

a) $x\sin 2y\,dx + x^2\cos 2y\,dy$;

b) $(y^2-1)\,dx + (2xy+3y)\,dy$;

c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$.