

Stabilita

Čebínská hromada

Země jako sněhová koule a její ohnivý konec

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.12.2024

Stavebniny u čebínského nádraží (dle doc. Maříka)

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání (opět v jednotkách objemu za jednotku času) se děje rychlostí úměrnou povrchu návětrné strany pláště. Jak to s hromadou dopadne?

$$y' = f(x, y), \quad f \text{ je spojitá} \quad (1)$$

Definice

Řešení y_0 rovnice (1) se nazývá *stabilní*, jestliže každé řešení y rovnice (1), které začne dostatečně blízko y_0 v bodě x_1 , zůstane blízko y_0 i pro všechna $x \geq x_0$.

Definice

Řešení y_0 rovnice (1) se nazývá *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a každé řešení y rovnice (1), které začne dostatečně blízko y_0 v bodě x_1 , se přibližuje y_0 pro $x \rightarrow \infty$.

Autonomní rovnice a test pro stabilitu

Rovnice

$$y' = f(y) \tag{2}$$

se nazývá *autonomní diferenciální rovnice*.

Věta

Nechť y^ je stacionární řešení rovnice (2) a necht' existuje $f'(y^*)$. Je-li $f'(y^*) < 0$, pak y^* je asymptoticky stabilní. Je-li $f'(y^*) > 0$, pak y^* je nestabilní.*

Základní předpoklady

- platí „zákon zachování energie“, tj. energie, kterou Země přijme od Slunce, musí být vyrovnána energií, kterou Země vyzáří
- musíme vzít v potaz, že část energie je odražena zpátky, tzv. *albedo* efekt
- probíhá transport tepla po planetě

Náš model má kořeny v roce 1969 a je založen na práci M. I. Budyka (Státní hydrologický institut v Petrohradu) a W. D. Sellsse (University of Arizona, Tucson).

Záření přicházející od Slunce

Záření na vrcholu atmosféry je dáno jako

$$Q \cdot s(y),$$

kde $y = \sin \theta$, θ je zeměpisná šířka a $Q = 343 \text{ W/m}^2$.

Funkce $s(y)$ je normalizována tak, aby platilo $\int_0^1 s(y) dy = 1$. Pro současný sklon zemské osy je funkce $s(y)$ aproximována jako

$$s(y) = 1 - 0,241(3y^2 - 1).$$

Viz North (1975).

Albedo

Množství záření absorbované Zemí na jednotku obsahu je

$$Q \cdot s(y) \cdot (1 - \alpha(y)),$$

kde $\alpha(y)$ označí odraženou část.

Led se zformuje je-li $T < T_c = -10^\circ\text{C}$. Je-li y_s hranice mezi zamrzlou a nezamrzlou částí Země, tak vezmeme

$$\alpha(y) = \begin{cases} \alpha_2 = 0,62 & y > y_s, \\ \alpha_1 = 0,32 & y < y_s \end{cases}$$

a

$$T(y_s) = T_c, \quad \alpha(y_s) = \alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0,47.$$

Viz Lindzen (1990).

Vyzařování planety Země

Steffan-Boltzmannův zákon říká, že

$$I(y) = \sigma T^4.$$

Pro Zemi je nutné násobit výraz emisním zlomkem $\epsilon < 1$ a dostaneme

$$I(y) = \epsilon \sigma T^4 \approx \epsilon \sigma T_0^4 \left[1 + \frac{4(T - T_0)}{T_0} \right], \quad T_0 = 273 \text{ K}.$$

Můžeme tedy psát

$$I = A + BT.$$

Současné hodnoty jsou $A = 202 \text{ W}$ a $B = 1,9 \text{ W}$, viz Graves, Lee, North (1993).

Přenos tepla po planetě

$$D(y) = C(\bar{T} - T),$$

kde \bar{T} je globální průměrná teplota a $C = 1,6B$ (viz Tung (2007))

Základní modelová rovnice

$$R \frac{\partial}{\partial t} T = Q_s(y)(1 - \alpha(y)) - I(y) + D(y), \quad (3)$$

kde R je tepelná kapacita Země

Globální průměrná teplota

Uvažíme symetrii podle rovníku, čili stačí řešit rovnici pro $y \geq 0$ s podmínkou $\frac{dT}{dy} = 0$ pro $y = 0$. Globální průměrná teplota je pak to samé, co teplota přes polokouli:

$$\bar{T} = \int_0^1 T(y) dy.$$

Integrováním rovnice (3) dostaneme

$$R \frac{d}{dt} \bar{T} = Q(1 - \bar{\alpha}) - A - B\bar{T}. \quad (4)$$

$$\bar{\alpha} = \int_0^1 s(y)\alpha(y) dy = \alpha_1 \int_0^{y_s} s(y) dy + \alpha_2 \int_{y_s}^1 s(y) dy$$

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha_1 & \text{pro Zemi bez ledu} \\ \alpha_2 & \text{pro zcela zmrzlou Zemi} \\ \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)y_s [1 - 0,241(y_s^2 - 1)] & \text{hranice ledu na } y_s \end{cases}$$

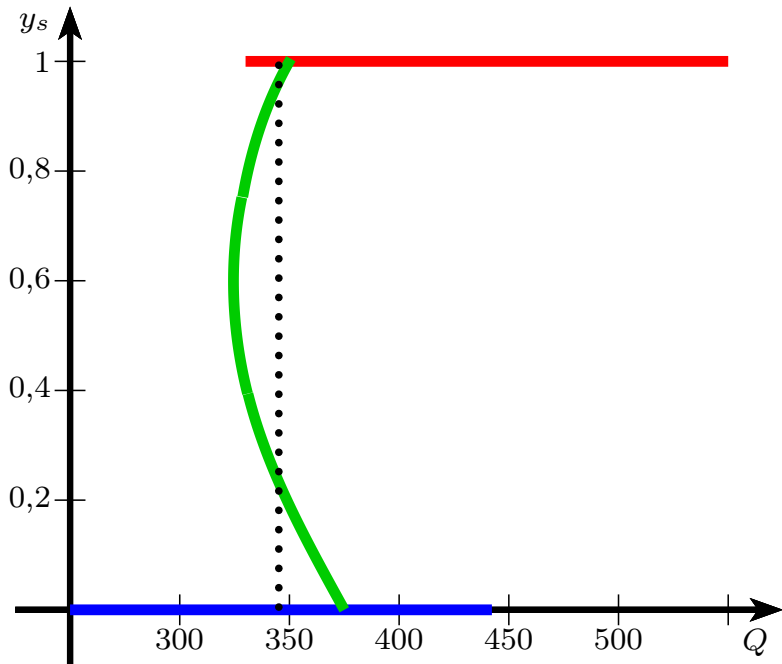
V současnosti je $y_s = 0.95$ (72° severní šířky) a $\bar{\alpha} = 0,33$.

Konstantní řešení

$$Qs(y)(1 - \alpha(y)) - (A + BT^*) + C(\bar{T}^* - T^*) = 0 \quad (5)$$

$$\bar{T}^* = \frac{Q(1 - \bar{\alpha}) - A}{B} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T^*(y) &= \frac{C\bar{T}^* + Qs(y)(1 - \alpha(y)) - A}{B + C} \\ &= \frac{Q}{B + C} \left[s(y)(1 - \alpha(y)) + \frac{C}{B}(1 - \bar{\alpha}) \right] - \frac{A}{B} \\ T_c &= \frac{Q}{B + C} \left[s(y_s)(1 - \alpha(y_s)) + \frac{C}{B}(1 - \bar{\alpha}) \right] - \frac{A}{B} \end{aligned} \quad (7)$$



Země zcela bez ledu

Pro Zemi bez ledu platí $\alpha(y) = \alpha_1 = 0,32$ všude. Dosazením do stacionárního řešení dostaneme

$$T^*(y) = \frac{Q(1 - \alpha_1)}{B + C} \left[s(y) + \frac{C}{B} \right] - \frac{A}{B}$$

$$T^*(1) > T_c$$

$$Q > \frac{(B + C) \left(T_c + \frac{A}{B} \right)}{(1 - \alpha_1) \left(s(1) + \frac{C}{B} \right)} \implies Q > 330 \text{ W/m}^2$$

$$\bar{T}^* = \frac{Q(1 - \alpha_1) - A}{B} = 16^\circ\text{C}$$

Zcela zmrzlá Země

Pro Zemi pokrytou ledem platí $\alpha(y) = \alpha_2 = 0,62$ všude. Dosazením do stacionárního řešení dostaneme

$$T^*(y) = \frac{Q(1 - \alpha_2)}{B + C} \left[s(y) + \frac{C}{B} \right] - \frac{A}{B}$$

$$T^*(0) < T_c$$

$$Q < \frac{(B + C) \left(T_c + \frac{A}{B} \right)}{(1 - \alpha_2) \left(s(0) + \frac{C}{B} \right)} \implies Q < 441 \text{ W/m}^2$$

$$\bar{T}^* = \frac{Q(1 - \alpha_2) - A}{B} = -38^\circ\text{C}$$

Země částečně pokrytá ledem

Vyčíslením rovnice (5) na hranici ledu dostaneme

$$\bar{T}^* = \frac{A}{C} + \left(1 + \frac{B}{C}\right) T_c - \frac{Qs(y_s)(1 - \alpha_0)}{C}, \quad \alpha_0 = \alpha(y_s)$$

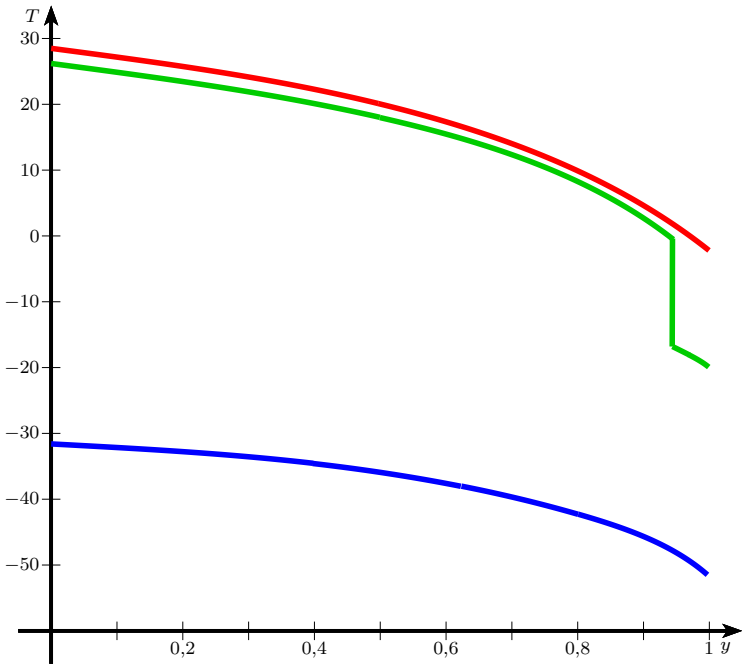
$$T^*(y) = \begin{cases} T_1(y) = \frac{Q(1-\alpha_1)s(y)+C\bar{T}^*-A}{B+C} & \text{pro } y < y_s \\ T_2(y) = \frac{Q(1-\alpha_2)s(y)+C\bar{T}^*-A}{B+C} & \text{pro } y > y_s \end{cases}$$

Frederiksen (1976)

$$T_i(y) = T_c + \frac{Q}{B+C} [s(y)(1 - \alpha_i) - s(y_s)(1 - \alpha_0)], \quad i = 1, 2$$

$Q = 343\text{W/m}^2$ a hranice ledu na šířce 72°

$$\bar{T}^* = 15^\circ\text{C}$$



Stabilita stacionárních řešení

$$R \frac{d}{dt} \bar{T} = G(\bar{T})$$

Perturbujme mírně teplotu od stacionárního řešení

$$\bar{T} = \bar{T}^* + u(t)$$

Udělejme lineární aproximaci

$$G(\bar{T}) = G(\bar{T}^* + u) \approx G(\bar{T}^*) + \frac{dG}{d\bar{T}}(\bar{T}^*)u = \frac{dG}{d\bar{T}}(\bar{T}^*)u$$

$$\frac{dG}{d\bar{T}}(\bar{T}^*) = -B - Q \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{T}}(\bar{T}^*)$$

Derivací (6) dostaneme

$$B = (1 - \bar{\alpha}) \frac{dQ}{d\bar{T}^*} - Q \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{T}}$$

$$\frac{dG}{d\bar{T}}(\bar{T}^*) = -(1 - \bar{\alpha}) \frac{dQ}{d\bar{T}^*}$$

$$R \frac{d}{dt} u(t) = -\gamma u(t),$$

kde

$$\gamma \equiv (1 - \bar{\alpha}) \frac{dQ}{d\bar{T}^*}$$

Řešení rovnice je

$$u(t) = u(0) e^{-\frac{\gamma}{R} t}.$$

Je-li $\gamma > 0$ perturbace vymizí, naopak je-li $\gamma < 0$ perturbace bude narůstat. Máme tak

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\bar{T}^*} > 0: & \text{ stabilní} \\ \frac{dQ}{d\bar{T}^*} < 0: & \text{ nestabilní} \end{aligned}$$

Budyko (1972), Cahalan a North (1979)

Stabilita ledové a bezledové Země

Derivováním (4) dostaneme

$$\frac{dQ}{dT^*} = \frac{B}{1 - \alpha_i} > 0.$$

Obě řešení jsou tedy stabilní.

Všimněme si, že tento výsledek nezávisí na C , čili nejslabší části našeho modelu.

Stabilita Země částečně pokryté ledem

Derivováním (4) dostaneme

$$B \frac{d\bar{T}^*}{dQ} = (1 - \bar{\alpha}) + Q \left(-\frac{d\bar{\alpha}}{dy_s} \right) \frac{dy_s}{dQ}$$

Víme, že

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dy_s} = -(\alpha_2 - \alpha_1)[1 - 0,482y_s - 0,241(y_s^2 - 1)].$$

Derivováním (7) a úpravou dostaneme

$$\frac{1}{Q} \frac{dQ}{dy_s} = \frac{1,45y_s(1 - \alpha_0) + \frac{C}{B} \frac{d\bar{\alpha}}{dy_s}}{s(y_s)(1 - \alpha_0) - \frac{C}{B}(1 - \bar{\alpha})}$$

$$B \frac{d\bar{T}^*}{dQ} = (1 - \bar{\alpha}) + \left(-\frac{d\bar{\alpha}}{dy_s} \right) \frac{s(y_s)(1 - \alpha_0) - \frac{C}{B}(1 - \bar{\alpha})}{1,45y_s(1 - \alpha_0) + \frac{C}{B} \frac{d\bar{\alpha}}{dy_s}}$$








$$\gamma \equiv (1 - \bar{\alpha}) \frac{dQ}{dT^*} = \frac{s(y_s)(1 - \alpha_0) - \frac{C}{B}(1 - \bar{\alpha})}{B \left[\left(-\frac{d\bar{\alpha}}{dy_s} \right) s(y_s)(1 - \alpha_0) + 1,45y_s(1 - \alpha_0)(1 - \bar{\alpha}) \right]}$$

$$1,45(1 - \alpha_0)y_s = \frac{C}{B} \left(-\frac{d\bar{\alpha}}{dy_s} \right)$$

To sice nevypadá, ale je to kvadratická rovnice a jejím kladným řešením je

$$y_s = -1 - 3 \frac{(1 - \alpha_0)B}{(\alpha_2 - \alpha_1)C} + \sqrt{\left[1 + 3 \frac{(1 - \alpha_0)B}{(\alpha_2 - \alpha_1)C} \right]^2 + 5,15} \approx 0,56$$

což je přibližně 34° šířky

-  Budyko, M. I. *The future climate*, Trans. Am. Geophys. Union, **53** (1972), 868–874.
-  Cahalan, R. F., North, G. R., *A stability theorem for energy-balance climate models*, J. Atmos. Sci, **36** (1979), 1178–1186.
-  Frederiksen, J., *Nonlinear albedo-temperature coupling in climate models*, J. Atmos. Sci, **33** (1976), 2267–2272.
-  Graves, C. E., Lee W. H., North, G. R., *New parametrization and sensitivity for simple climate models*, J. Geoph. Res., **98** (1993), 5025–5036.
-  Lindzen, R. S., *Dynamics in Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, 1990.
-  North, G. R., *Analytical solution to a simple climate model with diffusive heat transport*, J. Atmos. Sci., **32** (1975), 1301–1307.
-  Tung, K. K., *Topics in Mathematical Modeling*, Princeton University Press, 2007.