

3. cvičení (6. a 12. 10. 2023)

Komplexní rozšíření afinního prostoru

Pojmy:

- komplexně sdružený vektor k vektoru \mathbf{w} ;
- komplexně sdružený vektorový podprostor k podprostoru W ;
- komplexní rozšíření afinního podprostoru;
- reálný podprostor v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$;
- komplexně sdružený bod k bodu $A \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$;
- komplexně sdružený afinní podprostor k podprostoru $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$;
- maximální reálný podprostor obsažený v afinním podprostoru $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$.

Úlohy:

1. Udejte příklad:

- přímky v $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$, která nemá ani jeden reálný bod,
- přímky p v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ takové, že p a \bar{p} jsou rovnoběžky,
- přímky p v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ takové, že p a \bar{p} jsou různoběžky,
- přímky p v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ takové, že p a \bar{p} jsou mimoběžky.

2. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ jsou dány v reálné bázi bod $B = [1; -2; 3]$ a vektory $\mathbf{u} = (2; 1; -1)$ a $\mathbf{v} = (3; 0; 1)$. Určete souřadnice bodu $C = B + i\mathbf{u}$, bodu \bar{C} , vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ a vektoru $\bar{\mathbf{w}}$.

3. V $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ jsou dány v reálné bázi bod $K = [2 + i; 3 - 2i]$ a vektor $\mathbf{u} = (-1 + 3i, 3 + 2i)$. Určete parametrické i obecné rovnice přímky $p = (K, \mathbf{u})$.

4. Nalezněte reálné body přímek v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$:

- $p: ix + (3 + 2i)y - 1 = 0$;
- $q = AB$, kde $A = [1 + i; 2i]$, $B = [i; 1 + 2i]$;
- $r: x = (1 + i) + it$
 $y = (1 - i) + 2t, t \in \mathbb{C}$;

5. Určete rovnice reálných přímek, které prochází bodem:

- $K = [3 - 2i; 1 + i]$;
- $A = [2 + i; -1 + 2i; 1 - i]$.

6. Určete rovnice reálné přímky, která leží v rovině $\alpha: (3 - 2i)x + (1 + i)y - iz + 3 = 0$.

7. Určete maximální reálný podprostor obsažený v podprostoru $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$.

- $\mathcal{B}: (3 - 2i)x + (1 + i)y - iz = 0$;
- $\mathcal{C}: (1 + i)x + (2 - i)y = 1$
 $x + y + iz = 0$.

Řešení

Komplexní rozšíření afinního prostoru

$$\begin{aligned}2. \quad C &= [1 + 2i; -2 + i; 3 - i], \\ \overline{C} &= [1 - 2i; -2 - i; 3 + i], \\ \mathbf{w} &= (2 + 3i; 1; -1 + i), \\ \overline{\mathbf{w}} &= (2 - 3i; 1; -1 - i).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad \text{parametrické rovnice: } x &= (2 + i) + t(-1 + 3i); \quad y = (3 - 2i) + t(3 + 2i), \quad t \in \mathbb{C} \\ \text{obecná rovnice: } (3 + 2i)x &+ (1 - 3i)y - 1 + 4i = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \quad (\text{a}) \quad & \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right] \\ (\text{b}) \quad & \text{neexistují} \\ (\text{c}) \quad & \left[\frac{1}{2}; -1\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5. \quad (\text{a}) \quad p: x + 2y - 5 &= 0 \\ (\text{b}) \quad p: x &= 2 + t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= 1 - t, t \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6. \quad p: x &= t \\ y &= -3 - 3t \\ z &= -3 - 5t, t \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7. \quad (\text{a}) \quad p: x &= t \\ y &= -3t \\ z &= -5t, t \in \mathbb{C} \\ (\text{b}) \quad & \emptyset\end{aligned}$$