

4. cvičení (13. a 19. 10. 2023)

Bilineární formy

Pojmy:

- bilineární forma;
- symetrická a antisymetrická forma;
- věta o jedinečném rozkladu bilineární formy na symetrickou a antisymetrickou bilineární formu;
- matice bilineární formy;
- matice přechodu od báze B k bázi B' (opakování z *Analytické geometrie 1 a 2*);
- singulární vektory bilineární formy.

Úlohy:

1. V kanonické bázi na \mathbb{R}^3 je dána bilineární forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

Určete symetrickou formu f_S a antisymetrickou formu f_A , pro které platí $f = f_S + f_A$.

2. V kanonické bázi na \mathbb{R}^3 je dána bilineární forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_3.$$

Určete rovnice této bilineární formy v bázi $\mathbf{u}_1 = (1; 0; 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0; 1; 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 0)$.

3. Určete hodnotu a singulární vektory bilineární formy

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 5x_1y_2 + 3x_1y_3 + 5x_2y_1 - 6x_2y_2 + 16x_2y_3 + 3x_3y_1 + 16x_3y_2 - 10x_3y_3.$$

Kvadratické formy

Pojmy:

- kvadratická forma a její polární bilineární forma;
- polární báze kvadratické formy, normovaná polární báze;
- normální tvar kvadratické formy;
- signatura a typ kvadratické formy.

Úlohy:

4. Určete polární bilineární formu kvadratické formy $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2$.
5. Určete hodnotu a singulární vektory kvadratické formy $F(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$.
6. V nějaké bázi na reálném vektorovém prostoru V_4 jsou dány kvadratické formy F_1, F_2 a F_3 . Určete jejich normované polární báze, normální tvary rovnic, typy forem, signatury a transformační rovnice přechodu k normovaným polárním bázím.

$$F_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 3x_3x_4$$

$$F_2(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_3x_4$$

$$F_3(\mathbf{x}) = 3x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Řešení

Bilineární a kvadratické formy

1. $f_S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$

$$f_A(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 2x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$$

2. $f(\mathbf{x}'; \mathbf{y}') = -x'_1y'_2 + x'_1y'_3 + 2x'_2y'_1 + 4x'_2y'_2 + 2x'_2y'_3 + 4x'_3y'_1 + 5x'_3y'_2 + 3x'_3y'_3$

3. hodnost je 2; singulární vektory tvoří množinu $\{(-2t; t; t), t \in \mathbb{R}\}$

4. $f(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 3x_3y_3$

5. hodnost je 2; singulární vektory tvoří množinu $\{(t; -t; t), t \in \mathbb{R}\}$

6. $F'_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$; signatura (2, 2); indefinitní forma

$$F'_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$
; signatura (2, 0); pozitivně semidefinitní forma

$$F'_3(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$
; signatura (2, 2); indefinitní forma