

10. cvičení (30. 11. a 1. 12. 2023)

Kvadriky v projektivním a afinním prostoru

Pojmy:

- kvadrika;
- regulární a singulární kvadriky;
- singulární body kvadriky;
- polární rovina kvadriky, pól roviny;
- střed kvadriky, průměrová rovina kvadriky;
- asymptotická kuželová plocha kvadriky.

Úlohy:

1. Určete množinu singulárních bodů kvadriky:

(a) $K_1: x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_4^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_4 = 0$

(b) $K_2: x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_4 + 8x_3x_4 = 0$

2. Určete polární rovinu bodu $P = (1, 2, 0, 1)$ vzhledem ke kvadrice $K: x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + 2x_3x_4 = 0$.

3. Určete středy kvadrik:

(a) $K_1: 3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0$

(b) $K_2: 5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 18y - 36z = 0$

(c) $K_3: x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$

(d) $K_4: 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz + 8x - 4y + 12z - 5 = 0$

4. Je dána kvadrika $K: 2x^2 - 3y^2 - z^2 + 4xy + 6xz - 8yz + 2x - 8y - 11z - 2 = 0$.

(a) Určete obecnou rovnici průměrové roviny sdružené se směrem $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$.

(b) Určete obecnou rovnici průměrové roviny obsahující přímku $p: X = [3, 0, -1] + t \cdot (2, 5, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Ukažte, že přímka $p: X = [4, -2, 0] + t(6, 3, 2)$ má vzhledem ke kvadrice $K: x^2 - 4xy + 6yz + 2x - 5 = 0$ asymptotický směr, tzn. protíná kvadriku v nevlastním bodě.

6. Určete asymptotickou kuželovou plochu kvadriky $K: x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$.

Řešení

Kvadriky – pomocné úlohy

- nemá singulární body;
 - přímka singulárních bodů XY , kde $X = (-3, 1, 0, -1)$ a $Y = (4, 0, -1, 2)$.
- polární rovina $\pi: x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0$
- střed $S[0, 2, -2]$;
 - přímka středů $s: X = [-6, -5, 0] + t(3, 2, 1), t \in \mathbb{R}$;
 - nevlastní střed $\mathbf{s} = (2, -1, 0)$;
 - rovina středů $\sigma: 2x - y + 3z + 2 = 0$.
- rovina $\varrho: 2x + 3y + 13z + 2 = 0$;
 - rovina $\varrho: 16x - 19y + 21z - 27 = 0$.
- $K': x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z + 1 = 0$