MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2024

Daniel Urban

MASARYKOVA
UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Úlohy z finanční matematiky pro střední školy

Bakalářská práce

Daniel Urban

Vedoucí práce: prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc. **Brno 2024**

Bibliografický záznam

Autor:	Daniel Urban Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Úlohy z finanční matematiky pro střední školy
Studijní program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Informatika ve vzdělávání
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Akademický rok:	2023/2024
Počet stran:	vii + 31
Klíčová slova:	Matematika, Finanční Matematika, Střední škola, Jednoduché úročení, Složené úročení, Půjčka, Úvěr, Inflace, Spoření

Bibliographic Entry

Author:	Daniel Urban Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Tasks from financial mathematics for high school
Degree Programme:	Mathematics with a focus on education
Field of Study:	Mathematics with a focus on education Computer science in education
Supervisor:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Academic Year:	2023/2024
Number of Pages:	vii + 31
Keywords:	Mathematics, Financial Mathematics, High School, Simple Interest, Compound Interest, Loan, Credit, Inflation

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme základním úlohám z finanční matematiky, které slouží primárně pro začínající učitele matematiky na středních školách. Tato práce je vhodná také pro čerstvé absolventy střední školy, kteří by chtěli obohatit svoji finanční gramotnost a činit tak lépe finanční rozhodnutí nadále v životě. Obsahuje řešené úlohy na jednoduché a složené úročení, půjčku, spoření a inflaci.

Abstract

In this bachelor's thesis, we deal with basic tasks in financial mathematics, which are primarily used for fresh mathematics teachers in secondary schools. This work is also suitable for recent high school graduates who would like to enrich their financial literacy and thus make better decisions in life. It contains solved problems for simple and compound interest, loans, savings and inflation.

MUNI
SCI

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KOTLÁŘSKÁ 2, 611 37 BRNO
IČ: 00216224
DIČ: CZ00216224

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2023/2024

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Student:	Daniel Urban
Program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Specializace:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Informatika ve vzdělávání

Ředitel *ústavu* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Úlohy z finanční matematiky pro střední školy
Název práce anglicky:	Tasks from financial mathematics for high school
Jazyk závěrečné práce:	čeština

Oficiální zadání:
Vypracujte text s úlohami z finanční matematiky určený pro studenty a učitele středních škol. V teoretické části práce uveďte geometrickou posloupnost a matematické odvození pro jednoduché a složené úročení. V praktické části vypracujte úlohy zaměřené na úročení, úvěr a spoření. Použijte aktuální data českých bank.

Literatura:
RADOVÁ, Jarmila, Petr DVOŘÁK a Jiří MÁLEK. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada, 2013. 304 s. ISBN 9788024748313.

ODVÁRKO, Oldřich. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2005. 198 s. ISBN 8071963038.

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Datum zadání práce:	31. 8. 2023
V Brně dne:	4. 12. 2023

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Daniel Urban, 30. 10. 2023
prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc., 30. 10. 2023
RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 30. 10. 2023

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat své vedoucí této práce prof. RNDr. Zuzaně Došlé, DSc., za nápad na tuto práci, její čas, trpělivost, ochotu, odborné vedení a cenné rady při zpracovávání zdrojů.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 28. dubna 2024 ....

Daniel Urban

Obsah

Úvod **1**

Kapitola 1. Jednoduché a složené úročení **2**
- 1.1 Posloupnosti a řady 2
- 1.2 Základní pojmy finanční matematiky 3
- 1.3 Jednoduché úročení 5
- 1.4 Složené úročení 7

Kapitola 2. Půjčka a úvěr **11**

Kapitola 3. Spoření **15**

Kapitola 4. Inflace **18**

Kapitola 5. Shrnutí a další úlohy **21**
- 5.1 Přehled vzorců z finanční matematiky 21
- 5.2 Doplňující úlohy 22

Závěr **30**

Seznam použité literatury **31**

Úvod

Předmětem této práce jsou úlohy z finanční matematiky pro střední školy. Cílem práce je vytvořit studijní text pro učitele a studenty středních škol. Je vhodná také pro studenty učitelského studia matematiky jako rozšíření jejich znalostí.

V dnešní době je finanční gramotnost klíčová, ale dnešní učebnice tomu neodpovídají. Práce míří na studenty středních škol a jejich učitele, aby byli schopni jim danou látku předat. V práci je proto důraz na srozumitelnost a aktuálnost praktických úloh včetně použitých dat. Některé úlohy jsou podpořeny grafickým zpracováním.

Práce vychází hlavně z učebnice [3] a částečně také z učebnice [1]. Nevýhodou těchto učebnic je nedostatečně vysvětlený postup, neaktuálnost dat a nedostatek názorných příkladů.

Motivace pro tuto práci byl nedostatek znalostí především čerstvých absolventů středních škol, kteří po škole plánují budoucnost a s ní i rodinu a bydlení. Otázky typu, zda si vzít hypotéku nebo žít v podnájmu, kolik skutečně zaplatím české bance za úvěr i s poplatky. Otázky tohoto typu budou v této práci zodpovězeny a podloženy matematickými výpočty. Tato sbírka pracuje s aktuálními daty českých bank.

První kapitola obsahuje podpůrná matematická tvrzení, což jsou posloupnosti a řady, dále základní pojmy z finanční matematiky (úrokové období a míra), jednoduché a složené úročení. Obsahuje ilustrační příklad, který ukazuje, jaký vzniká rozdíl mezi jednoduchým a složeným úročením.

Druhá kapitola je věnována půjčce a úvěru. Součástí je odvození vzorce pomocí geometrické řady a názorné příklady. Obsahuje také příklad s grafickým znázorněním zisku banky a půjčené částky.

Třetí kapitola je zaměřená na spoření. Zahrnuje vzorce pro dva různé případy ukládání částky na začátku nebo na konci úrokovacího období.

Čtvrtá kapitola rozebírá inflaci. Dále obsahuje tabulku hodnot inflace v České republice v předešlých letech.

Pátá kapitola shrnuje veškeré důležité vzorce, které se vyskytují napříč celou prací. Nabízí další řešené úlohy, se kterými se čtenář může setkat v reálném životě, spočítané pomocí těchto vzorců. Je nutné rozpoznat, jaký matematický vzorec je vhodný pro danou úlohu.

Práce je vysázena systémem LaTeX.

Kapitola 1

Jednoduché a složené úročení

1.1 Posloupnosti a řady

Posloupnost je funkce definovaná na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Značíme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Hodnoty funkce, která je posloupností, nazýváme členy posloupnosti. Posloupnost je konečná nebo nekonečná množina objektů, v níž záleží na pořadí a objekty se mohou opakovat.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *aritmetická posloupnost*, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro každé přirozené číslo n platí

$$a_{n+1} = a_n + d\,. \tag{1.1}$$

Číslo d nazýváme *diference* aritmetické posloupnosti.
Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti neboli **aritmetická řada** je roven

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}. \tag{1.2}$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická posloupnost*, právě když existuje reálné číslo q takové, že pro každé přirozené číslo n platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q\,. \tag{1.3}$$

Číslo q nazýváme *kvocient* geometrické posloupnosti. Pro potřeby této práce nám postačí konečná geometrická posloupnost, která vznikne, je-li definičním oborem konečná podmnožina prvních n přirozených čísel.

Nyní si odvodíme součet prvních n členů *geometrické řady*. Budeme jej totiž potřebovat v kapitole 2 a 3 pro odvození vzorce pro úvěr a spoření. Součet libovolné řady vzniká sečtením všech členů.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\,.$$

Z rovnice (1.3) můžeme vidět, že každý člen lze vyjádřit pomocí toho předešlého násobením kvocientu q. Dostaneme

$$a_2 = a_1 \cdot q\,, \quad a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2\,, \quad \ldots \quad , \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\,.$$

Vyjádříme celý součet pomocí prvního členu a_1 a kvocientu q a dostaneme

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}\,. \tag{1.4}$$

Vynásobíme obě strany rovnice členem $-q$ a dostáváme

$$-q \cdot S_n = -a_1 \cdot q - a_1 \cdot q^2 - a_1 \cdot q^3 - ... - a_1 \cdot q^{n-1} - a_1 \cdot q^n\,. \tag{1.5}$$

Nyní sečteme rovnici (1.4) s rovnicí (1.5) a dostaneme

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n\,.$$

Vytkneme S_n z levé strany rovnice a z pravé strany rovnice vytkneme a_1 a dostaneme

$$S_n \cdot (1-q) = a_1(1-q^n)\,.$$

Vyjádříme součet S_n a dostaneme finální vzorec pro součet prvních n členů geometrické řady

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\,.} \tag{1.6}$$

1.2 Základní pojmy finanční matematiky

Dlužník je právní subjekt půjčující si peníze. Nebo také můžeme banku brát jako dlužníka, která nám za peníze uložené v bance vyplatí úrok.

Věřitel je právní subjekt, který tyto peníze někomu zapůjčil. Nebo také ten, kdo peníze do banky uložil.

Tedy pokud mi kamarád půjčí peníze, stává se on věřitelem a já dlužníkem.

Úrok je smluvená částka, kterou vyplatí dlužník věřiteli jako odměnu za půjčení peněz. Značíme jej u.

Jestliže si například půjčíme peníze od banky, bude po nás chtít větší obnos než byl původně zapůjčený kapitál. Rozdílu těchto hodnot říkáme úrok. Banka na nějaký čas o peníze přijde a jakmile se vrátí, sníží se jejich hodnota kvůli inflaci, které se budeme věnovat v kapitole 4. Banka dále podstupuje riziko, že se jí peníze už nevrátí.

Příklad 1.1. Kamarád vám půjčil 5 000 Kč. Domluvil se s vámi, že mu je vrátíte nazpět až za měsíc, avšak bude to celkem činit 6 000 Kč. Určete, kolik z této částky je úrok?

Řešení. Označme P_n je částka s úroky a P je půjčená částka. Pak úrok vypočítáme jako rozdíl těchto dvou hodnot.

$$u = P_n - P\,.$$

Dosadíme hodnoty ze zadání a dostaneme

$$6\,000 - 5\,000 = 1000\,\text{Kč}.$$

Z celkové částky 6 000 Kč, úrok činí 1 000 Kč, tj. 20 % z půjčené částky. △

Úroková míra/Úroková sazba je podíl úroku získaného za daný časový úsek a původního kapitálu. Vyjadřuje se v procentech nebo ve tvaru desetinného čísla a značíme ji i. Nejčastěji se používá *roční úroková míra p.a.* („per annum“ z latiny a znamená za rok)

Banka vám z úroků samozřejmě odečítá i daně. Daň z úroků je v České republice 15 %. Váš výdělek tedy bude činit 85 % z původního zisku. Proto se rovnou úroková míra i přepočítává

$$i = i_p \cdot 0{,}85\,, \tag{1.7}$$

kde i_p značí původní úrokovou míru i před zdaněním.

Příklad 1.2. Máte založený běžný účet u banky B, který má roční úrokovou míru 0,1 % p.a. Jaká bude hodnota této míry ve tvaru desetinného čísla včetně daně 15 %?

Řešení. Označme roční úrokovou míru i. Původní úroková míra je uvedená v procentech, tedy ji budeme muset při převodu vydělit 100. Dále musíme odečíst daň 15 %, tedy vynásobit 0,85. Dostaneme

$$i = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}85}{100} = 0{,}00085\,.$$

Hodnota úrokové míry po zdanění ve tvaru desetinného čísla je 0,00085. △

Pozor, banky mají tendenci uvádět své úrokové míry před zdaněním, protože takové číslo bude větší a zákazník má pocit, že je to automaticky výhodnější. Avšak banky skoro nikdy neuvádí, zda je úroková míra před nebo po zdanění, tuto informaci uvedou pouze v podrobných dokumentech. Ze stejných důvodů také uvádí úrokovou míru roční, která se označuje p.a.

Zde máme pro příklad uvedenou tabulku aktuálních úrokových měr známých českých bank pro spořící účty. Všechny úrokové míry jsou roční, tedy p.a. a všechny tyto banky mají ve svých reklamách uvedenou úrokovou míru před zdaněním

Jméno banky	Úroková míra před zdaněním	Úroková míra podle (1.7) ve tvaru desetinného čísla
Air Bank	4,75 %	0,040375
Česká spořitelna	5 %	0,0425
ČSOB	5 %	0,0425
Komerční banka	5 %	0,0425
Raiffeisenbank	4,9 %	0,04165

Nutno upozornit, že hodnoty uvedené v tabulce platí u všech bank pouze při splnění jejich konkrétních podmínek pro spořící účet. Všechny banky však mají kromě ostatních podmínek jednu totožnou, nepřekročení stanovené úročené částky (nejčastěji například 250 000 Kč).

Úrokovací období je časový úsek, během něhož jsou úroky spočítány nebo připsány k původnímu kapitálu. Příklady jsou roční, měsíční, a denní úrokovací období.

Počet dní úrokovacího období značíme t. Počet těchto úrokovacích období značíme n (počet dní při denním úročení, počet měsíců při měsíčním úročení nebo počet let při ročním úročení).

Výše úroku závisí mimo jiné také na době (počtu dní), po kterou je tento kapitál úročen. Pro tuto dobu se užívá název **úroková doba**.

Do hry přicházejí takzvané standardy a ve světě každá banka používá jiný. V České republice se nejčastěji používá standard 30E/360 neboli německý standard. V tomto standardu se počítá každý měsíc jako 30 dní a celý rok jako 360 dní. Jiné standardy nebudeme v této práci uvažovat, ale liší se pouze tím, jakým způsobem se dny v roce počítají a kolik má rok dní.

Pokud má banka úrokovou míru i uvedenou v p.a. a není specifikováno jinak, úročí se vám peníze jednou ročně. Pokud chcete dostat z peněz úroky v jiné části roku než na konci, můžete tak docílit zrušením účtu. V tomto případě je banka povinna připsat vám všechny úroky za úrokovou dobu.

Nyní se podíváme na příklad, který nám problematiku standardů objasní.

Příklad 1.3. Dne 10. 4. 2023 jste si založil v bance účet s počátečním vkladem 32 000 Kč. Jelikož se vám nelíbila nízká úroková míra této banky, která činila 2,2 % p.a., tak jste tento účet dne 16. 11. 2023 zrušil. Kolik dní byla úroková doba, jestliže víte, že banka používá německý standart 30E/360?

Řešení. Ve standardu 30E/360 má každý měsíc 30 dní a zbývající dny v necelých měsících jsou připočítány. V dubnu začneme počítat od 11. dne, jelikož den vkladu se nezapočítává a v listopadu počítáme 16 dní, jelikož den výběru se naopak započítává.

V dubnu máme tedy $30-10=20$ dní, v listopadu máme 16 dní a zbývající měsíce jsou květen, červen, červenec, srpen, září, říjen. Každý počítáme jako 30 dní, tedy

$$30\cdot 6 = 180\,\text{dní}.$$

Celkem doba trvání účtu v tomto standardu byla

$$20+16+180 = 216\,\text{dní}.$$

V německém standardu byla úroková doba 216 dní. △

Poznámka. Jak již bylo uvedeno, budeme pracovat pouze s německým standardem, a proto v zadání dalších příkladů nebude už druh standardu uveden.

1.3 Jednoduché úročení

Jednoduché úročení je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z počátečního kapitálu. Úroky se již dále nezhodnocují.

Nechť P je počáteční kapitál, i je úroková míra po zdanění, t je počet dní úrokovacího období a n je počet těchto úrokovacích období. Pak je úrok

$$u = P \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\,. \tag{1.8}$$

Celkovou částku P_n spočítáme přičtením úroku u k počátečnímu kapitálu P

$$P_n = P + u\,.$$

Po dosazení za úrok získáme celkovou částku

$$P_n = P + P \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\,,$$

vytkneme P a dostaneme

$$\boxed{P_n = P \cdot (1 + i \cdot \frac{t}{360} \cdot n)\,.} \tag{1.9}$$

Pozor! Do vzorce za úrokovou sazbu i nedosazujeme procenta, ale desetinné číslo.

Příklad 1.4. V bance máte zřízený běžný účet, na kterém máte 16 500 Kč. Banka nabízí pro běžné účty roční úrokovou sazbu 0,05 % p.a. (procent ročně) po zdanění. Kolik peněz budete mít na účtě za 4 roky při stejné roční úrokové míře?

Řešení. Je nutno přepočítat uvedenou úrokovou sazbu i. Je uvedená v procentech a chceme ji ve tvaru desetinného čísla, tudíž ji vydělíme 100.

$$i = \frac{0{,}05}{100} = 0{,}0005\,.$$

Po čtyřech letech se celková částka i s úrokem počítá odvozeným vzorcem (1.9).

Za počáteční kapitál P dosadíme 16 500 Kč, za t dosadíme počet dní úrokovacího období, tedy 360 při ročním úročení a za n dosadíme 4 roky. Dostaneme

$$P_4 = 16\,500 \cdot (1 + 0{,}0005 \cdot \frac{360}{360} \cdot 4)\,\text{Kč},$$

roznásobíme a sečteme

$$P_4 = 16\,533\,\text{Kč}.$$

Po 4 letech budete mít na účtě 16 533 Kč. Z porovnání původního vkladu a výsledku vidíme, že běžný účet generuje minimální zisk. △

Příklad 1.5. Nyní se vrátíme k Příkladu 1.3. Se znalostí jednoduchého úročení lze nyní dopočítat, kolik vám banka celkem vyplatila za 216 dní, počítejte s daní z úroku 15 %.

Řešení. Na konci tohoto příkladu jsme došli k úrokové době 216 dní.

Nyní zjistěme úrokovou míru i po zdanění. Opět nám po zdanění 15 % zůstane 0,85 původního úroku, proto je úroková míra

$$i = 0{,}85 \cdot 0{,}022 = 0{,}0187\,.$$

Ze zadání označme P jako počáteční vklad, který činí 32 000 Kč. Do vzorce (1.9) dosadíme za $t = 216$ dní. Tato úroková doba bude pouze jedna, tedy $n = 1$. Dostaneme

$$P_1 = 32\,000 \cdot \left(1 + 0{,}0187 \cdot \frac{216}{360} \cdot 1\right) \text{Kč}.$$

Dopočítáme a zaokrouhlíme na 2 desetinná místa a vyjde nám

$$P_1 = 32\,359{,}04\,\text{Kč}.$$

Z vkladu 32 000 Kč dostaneme za 216 dní při 2,2 % p.a. 32 359,04 Kč. △

Poznámka. V celé této práci budeme vždy výslednou částku zaokrouhlovat na 2 desetinná místa.

1.4 Složené úročení

Složené úročení je typ úročení, kde se kromě počátečního vkladu zhodnocují i dříve připsané úroky.

Nyní budeme pracovat s obecnými hodnotami, abychom odvodili obecný vzorec. Pokud klient vložil do banky P Kč s úrokovou mírou i a počtem dní úrokovacího období t, po prvním roce bude mít na účtě

$$P_1 = P + i \cdot \frac{t}{360} \cdot P,$$

po vytknutí dostaneme

$$P_1 = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

Po druhém roce jsou opět peníze na účtě zhodnoceny stejnou úrokovou mírou i, ale tentokrát společně s úroky z minulého roku

$$P_2 = \underbrace{\left[P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)\right]}_{za\ 1.\ rok} + \underbrace{i \cdot \frac{t}{360} \cdot \left[P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)\right]}_{za\ 2.\ rok},$$

vytkneme $P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$ a dostaneme

$$P_2 = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \left[1 + i \cdot \frac{t}{360}\right] = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^2.$$

Třetí rok bychom stejným způsobem došli k výsledné částce

$$P_3 = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^3.$$

Přidáváním roků jsme došli ke geometrické posloupnosti (1.3), která má kvocient

$$q = \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

Pokud klient úročí po dobu n roků se stejnou úrokovou mírou i po celou dobu, dostáváme obecný vzorec

$$\boxed{P_n = P\cdot\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^n,} \tag{1.10}$$

kde P_n je celková částka včetně úroků, P je počáteční částka, n je počet roků (úrokovacích období) a t počet dní těchto úrokovacích období.

Poznámka. V případě, že úročíme měsíčně, bude n počet měsíců. Stejně tak při denním úročení bude n počet dní.

Příklad 1.6. Banka R vám nabídla spořící účet s úrokovou mírou 4,9 % p.a. před zdaněním, pokud splníte jejich podmínky. Na tento účet jste vložili 65 000 Kč na auto. Zajímá vás, zda si budete moct za sedm let koupit auto za 90 000 Kč, jestliže splníte každý rok jejich podmínky.

Řešení. Nejdříve přepočítáme úrokovou míru i. Ze zadání vidíme, že úroková míra $i_p = 0,049$. Daň z úroků je 15 %, proto opět podle (1.7)

$$i = 0{,}049\cdot 0{,}85 = 0{,}04165\,.$$

Nyní dosadíme hodnoty ze zadání do vzorce (1.10), kde počáteční vklad P je 65 000 Kč, částka se úročila $n = 7$ let. Dostáváme

$$P_7 = 65\,000\cdot\left(1+0{,}04165\cdot\frac{360}{360}\right)^7 \text{Kč}.$$

Po zaokrouhlení na 2 desetinná místa dostaneme

$$P_7 = 86\,490{,}04\,\text{Kč}.$$

Tolik peněz bude na účtě po sedmi letech. Nyní musíme ověřit, zda máme dostatek peněz na koupi auta

$$86\,490{,}04 - 90\,000 = -3\,509{,}96\,\text{Kč}.$$

Po sedmi letech bohužel na auto za 90 000 Kč spořící účet nenašetří. Bude vám na něj chybět 3 509,96 Kč. △

Příklad 1.7. Vsadili jste si ticket u Sazky a vyhráli jste 25 000 000 Kč. Uložili jste toto jmění do banky A, která nabízí termínovaný vklad na 2 měsíce s revolvingem (po 2 měsících lze vklad vybrat nebo uložit na další 2 měsíce). Úroky vám připisuje denně s úrokovou sazbou 4,32 % p.a. (roční) před zdaněním. Kolik vám banka vyplatí po 2 a po 6 měsících?

Řešení. Počáteční vklad P je 25 000 000 Kč, počet dní n je 60 a úrokovou sazbu i_p musíme ještě zdanit. Dostaneme

$$i = 0{,}0432\cdot 0{,}85 = 0{,}03672\,.$$

Jelikož se úroky připisují denně, dosadíme za $t = 1$ den. Nyní známe všechny hodnoty, které dosadíme do vzorce (1.10) a dostáváme

$$P_{60} = 25\,000\,000\cdot\left(1+0{,}03672\cdot\frac{1}{360}\right)^{60} = 25\,153\,461{,}29\,\text{Kč}.$$

Po 2 měsících vám banka vyplatí 25 153 461,29 Kč.

Nyní se zaměříme na druhou část zadání, kdy necháme výhru úročit 6 měsíců, tedy 180 dní. Můžeme pouze upravit počet dní v předešlém vzorci. Dostaneme

$$P_{180} = 25\,000\,000 \cdot \left(1 + 0{,}03672 \cdot \frac{1}{360}\right)^{180} = 25\,463\,215{,}69\,\text{Kč}.$$

Po 6 měsících získáme 25 463 215,69 Kč. △

Poznámka. Tato banka nabízí termínovaný vklad tohoto typu pouze do výše 30 milionů korun, tudíž částka z tohoto příkladu byla na hraně. Pro vyšší částku máte možnost domluvit se s bankou na výši úrokové sazby individuálně nebo zvolit jinou banku.

Příklad 1.8. Paní Dvořáková zdědila po své babičce 300 000 Kč. Tyto peníze se rozhodla vložit do banky C na 5 let s roční úrokovou mírou 5,7 % p.a. před zdaněním. Spočítejte jaký bude celkový kapitál, jestliže bude banka úročit
a) Jednoduchým úročením,
b) Složeným úročením.

Řešení. Pro obě části úlohy musíme nejdříve spočítat úrokovou míru i po zdanění

$$i = 0{,}057 \cdot 0{,}85 = 0{,}04845.$$

Počáteční vklad $P = 300\,000$ Kč, $n = 5$ let a jelikož se připisují úroky ročně, tak délka úrokovacího období $t = 360$ dní.

a) Pro jednoduché úročení dosadíme hodnoty do vzorce (1.9) a dostaneme

$$P_n = 300\,000 \cdot (1 + 0{,}04845 \cdot \frac{360}{360} \cdot 5) = 372\,675\,\text{Kč}.$$

Po 5 letech jednoduchého úročení bude na účtě 372675 Kč.

b) Pro složené úročení dosadíme hodnoty do vzorce (1.10) a dostaneme

$$P_n = 300\,000 \cdot \left(1 + 0{,}04845 \cdot \frac{360}{360}\right)^5 = 380\,066{,}748\,\text{Kč}.$$

Po 5 letech složeného úročení bude na účtě 380 066,748 Kč. Rozdíl těchto hodnot činí

$$380\,066{,}748 - 372\,675 = 7\,391{,}748\,\text{Kč}.$$

Rozdíl celkových hodnot pro jednoduché a složené úročení bude po 5 letech 7 391,748 Kč. △

Poznámka. Můžeme si všimnout, že tento rozdíl není zanedbatelný. Dejte si proto u bank pozor, zda Vám připočítávají úroky na stejný účet, tj. úroky z úroků.

Nyní pro ilustraci rozdílu modifikujeme řešení tohoto příkladu tak, že spočítáme každý rok zvlášť pro lepší grafické znázornění.

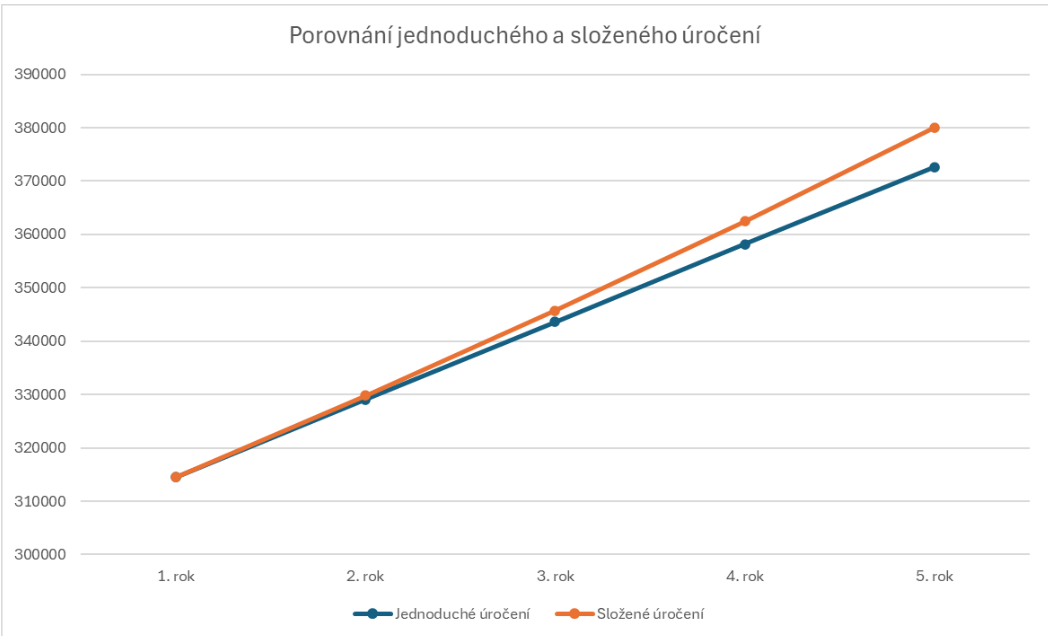
Pro jednoduché úročení opět použijeme vzorec (1.9), kde počet úrokovacích období n bude stejný jako rok, pro který hodnotu počítáme. Dostaneme

$$P_1 = 300\,000 \cdot (1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360} \cdot 1) = 314\,535\,\text{Kč}.$$
$$P_2 = 300\,000 \cdot (1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360} \cdot 2) = 329\,070\,\text{Kč}.$$
$$P_3 = 300\,000 \cdot (1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360} \cdot 3) = 343\,605\,\text{Kč}.$$
$$P_4 = 300\,000 \cdot (1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360} \cdot 4) = 358\,140\,\text{Kč}.$$
$$P_5 = 300\,000 \cdot (1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360} \cdot 5) = 372\,675\,\text{Kč}.$$

Nyní pro složené úročení použijeme vzorec (1.10), kde se opět bude měnit pouze počet úrokovacích období n. Dostaneme

$$P_1 = 300\,000 \cdot \left(1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360}\right)^1 = 314\,535\,\text{Kč}.$$
$$P_2 = 300\,000 \cdot \left(1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360}\right)^2 = 329\,774\,\text{Kč}.$$
$$P_3 = 300\,000 \cdot \left(1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360}\right)^3 = 345\,751\,\text{Kč}.$$
$$P_4 = 300\,000 \cdot \left(1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360}\right)^4 = 362\,503\,\text{Kč}.$$
$$P_5 = 300\,000 \cdot \left(1 + 0,04845 \cdot \frac{360}{360}\right)^5 = 380\,066\,\text{Kč}.$$

Porovnání jednoduchého a složeného úročení nám ukáže následující graf.



Můžeme si všimnout, že jednoduché úročení narůstá lineárně, protože se úroková míra násobí. Složené úročení narůstá exponenciálně, protože se úroková míra umocňuje.

Kapitola 2

Půjčka a úvěr

Pokud si dlužník půjčí peníze od věřitele, mluvíme o **půjčce** nebo o **úvěru**. Pro potřeby finanční matematiky je půjčka a úvěr to stejné.

Nejběžnější způsob splátek je takzvaná *anuitní splátka*, která se opakuje v pravidelných časových intervalech (například jednou za měsíc).

Banka poskytla úvěr P Kč s úrokovou mírou i a počet dní úrokovacího období t. Dlužník splatí úvěr n anuitami. Tyto anuity budou spláceny jednou za úrokovací období. První úročení bankou a bezprostředně následující splátka budou poprvé realizovány po t dnech od poskytnutí úvěru.

Označíme si neznámou a pro výši anuitní splátky. Na konci 1. úrokovacího období banka k půjčené částce P připíše úrok, tedy

$$P + i \cdot \frac{t}{360} \cdot P\,,$$

vytkneme P a dostaneme

$$P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

Po zaplacení 1. anuity (tuto anuitu odečteme od celku)

$$P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\,.$$

Na konci 2. úrokovacího období banka připíše úrok

$$\left[P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\right] \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

Po zaplacení 2. anuity dostaneme

$$\left[P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\right] \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\,.$$

Na konci n-tého úrokovacího období (připsání úroku a zaplacení n-té anuity) máme

$$\left(\left[\left(\left[P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\right] \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\right) \cdots\right] \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\right) \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) - a\,.$$

V tomto výrazu se dvojčlen $\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)$ vyskytuje celkem n-krát. Dluh je po n-té anuitě splacen a proto je tento získaný výraz roven 0 Kč

$$P\cdot\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^n-a\cdot\left[\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^{n-1}+\cdots+\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)+1\right]=0\text{ Kč}.$$

Členy v hranaté závorce tvoří geometrickou řadu, na kterou aplikujeme vzorec pro součet (1.6), kde kvocient q je $\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)$. Dostaneme

$$P\cdot\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^n-a\cdot\frac{\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^n-1}{\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)-1}=0\text{ Kč}.$$

Převedeme záporný člen na druhou stranu a vyjádříme anuitu

$$\boxed{a=\frac{P\cdot\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^n\cdot i\cdot\frac{t}{360}}{\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^n-1}.}\tag{2.1}$$

Příklad 2.1. Pan Novák si chce půjčit 500 000 Kč na opravy domu v Bance M. Chtěl by tuto půjčku splatit za 10 let. Banka mu nabídla roční úrokovou sazbu 4,87 % p.a. po zdanění. Spočítejte jeho měsíční splátku a kolik zaplatí celkem. Daň a poplatky jsou již započítány.

Řešení. Splátky jsou měsíční a t je počet dní mezi anuitami, podle německého standardu 30E/360 je $t=30$ dní.

Nyní spočítáme počet anuit n neboli splátek. Jelikož pan Novák má splácet po dobu 10 let každý měsíc, bude počet anuit

$$n=10\cdot 12=120.$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce (2.1), kde $i=0,0487$ a dostaneme

$$a=\frac{500\,000\cdot\left(1+0{,}0487\cdot\frac{30}{360}\right)^{120}\cdot 0{,}0487\cdot\frac{30}{360}}{\left(1+0{,}0487\cdot\frac{30}{360}\right)^{120}-1}\text{ Kč}.$$

Po zaokrouhlení na 2 desetinná místa vychází anuita

$$a=5\,271{,}56\,\text{Kč}.$$

Měsíční splátka pana Nováka tedy bude 5 271,56 Kč.

Nyní jelikož známe měsíční splátku a víme, že splátek bylo 120, celkem zaplatil

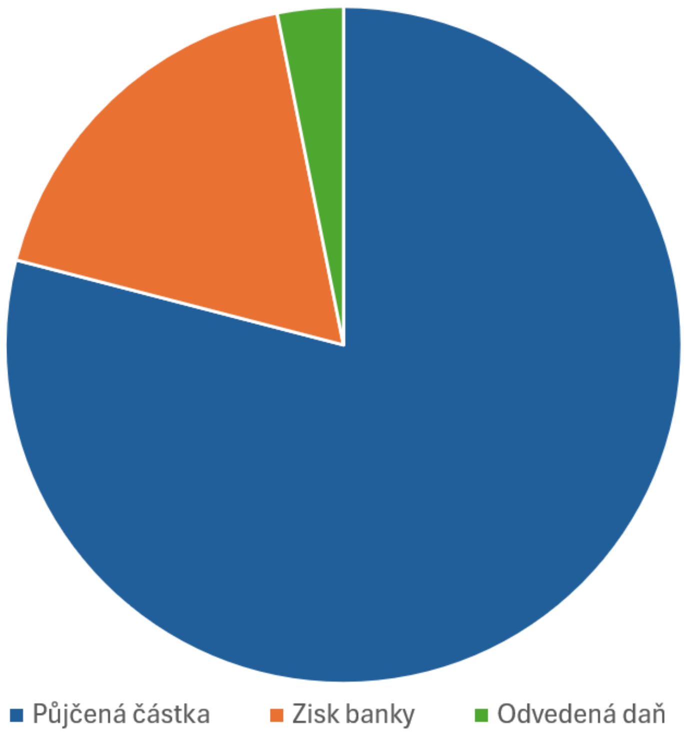
$$P_{120}=5\,271{,}56\cdot 120=632\,587{,}33\,\text{Kč}.$$

Pan Novák celkem za půjčku zaplatí 632 587,33 Kč. △

Poznámka. Pokud odečteme od celkové částky počáteční půjčku, dostaneme kolik peněz si za tuto službu vzala banka.

$$632\,587{,}33 - 500\,000 = 132\,587{,}33\,\text{Kč}.$$

Banka odvedla daň 15 % z úroků z této půjčky, která nebyla zahrnuta ve výpočtu. Kolik zaplatil navíc bance a odvedenou daň znázorňuje následující graf.



Příklad 2.2. Rozhodl jste se vzít si hypotéku na nemovitost, jejíž cena je 6 000 000 Kč. Banka C vám nabídla pro tuto nemovitost hypotéku ve výši 4 800 000 Kč, tudíž 1 200 000 Kč musíte mít našetřeno předem. Banka vám nabídla fixaci úrokové sazby 7,89 % p.a. po zdanění po dobu 20 let. Jaká bude výše měsíční splátky, jestliže si přejete splácet tuto hypotéku právě těchto fixovaných 20 let?

Řešení. Splátky hypotéky jsou na měsíční bázi, tudíž t neboli počet dní mezi splátkami je 30 (podle německého standardu 30E/360). Půjčená částka P je 4 800 000 Kč. Úroková sazba i ve formě desetinného čísla je 0,0789.

Označme n počet anuit (splátek). Jelikož splácíme 20 let a každý rok má 12 měsíců, tak

$$n = 20 \cdot 12 = 240\,.$$

Známe všechny potřebné hodnoty a můžeme dosadit do vzorce (2.1) pro výpočet měsíční splátky

$$a = \frac{4\,800\,000 \cdot \left(1 + 0{,}0789 \cdot \dfrac{30}{360}\right)^{240} \cdot 0{,}0789 \cdot \dfrac{30}{360}}{\left(1 + 0{,}0789 \cdot \dfrac{30}{360}\right)^{240} - 1}\,.$$

Zaokrouhlíme na 2 desetinná místa

$$a = 39\,821{,}14\,\text{Kč}\,.$$

Výše měsíční splátky je 39 821,14 Kč po dobu 20 let. △

Poznámka. Pozor! Takhle dlouhou dobu fixace jako v tomto příkladě u banky nikdy nedostanete. Většinou je maximum 10 let, avšak čím delší doba, tím větší úroková sazba. Po zbytek splácených let vám totiž banka může úrokovou sazbu zvětšovat a tím se zvýší i měsíční splátka.

Poznámka. Hypotéka se narozdíl od půjčky neobejde bez vlastního kapitálu, který tvoří 10 až 20 % z celkové ceny nemovitosti. Dále ručíte nemovitostí, kterou vám banka může zabavit v případě nesplácení hypotéky.

Kapitola 3

Spoření

Pokud klient vkládá na svůj spořící účet v bance fixní částku ve stále stejných časových intervalech, mluvíme o **spoření**.

Uvažme úrokovou míru bankovního konta i, úrokovací období banky t dní. Na základě toho, kdy je kapitál ukládán, rozlišujeme dva případy:

a) Jestliže klient ukládá **na začátku** každého úrokovacího období částku P, pak na konci prvního úrokovacího období bude na bankovním kontě po připsání úroku částka

$$P_1 = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

Na konci druhého úrokovacího období

$$P_2 = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) + P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

Na konci třetího úrokovacího období

$$P_3 = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) + P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^2 + P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^3.$$

Můžeme si všimnout, že přidávání úrokovacích období tvoří geometrickou řadu (1.6), jejíž kvocient $q = (1 + i \cdot \frac{t}{360})$ a člen $a_1 = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$. Pro n-té úrokovací období bude na bankovním kontě po připsání úroku částka

$$\boxed{P_n = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{i \cdot \frac{t}{360}}.} \tag{3.1}$$

b) Jestliže klient ukládá **na konci** každého úrokovacího období částku P, znamená to, že se již nestihne tato částka zúročit na konci prvního úrokovacího období. Při odvození obecného vzorce bude kvocient stejný, ale první člen $a_1 = P$. Dostáváme pro n-té úrokovací období

$$\boxed{P_n = P \cdot \frac{\left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{i \cdot \frac{t}{360}}.} \tag{3.2}$$

Pozor! Některé banky však neposílají peníze zpět na spořící účet, ale posílají je na běžný účet, který je s ním spojený. Dělají tak proto, aby se neúročily úroky a bylo to pro banky výhodnější.

Příklad 3.1. Student Michal si přivydělává ke studiu a na začátku každého měsíce ukládá částku 4 000 Kč na spořící účet v bance A. Banka A nabízí spoření s roční úrokovou sazbou ve výši 6 % p.a. před zdaněním. Spočítejte, kolik Michal naspoří na konci svého studia (5 let), jestliže
a) banka posílá úroky zpět na spořící účet,
b) banka posílá úroky na běžný účet, který je se spořícím účtem spojený (úroky se neúročí).

Řešení.

Nejdříve spočítáme úrokovou sazbu i po zdanění, když víme, že daň je 15 %.

$$i = 0{,}06 \cdot 0{,}85 = 0{,}051\,.$$

Jelikož Michal spoří jednou měsíčně, bude délka úrokovacího období $t = 30$ dní. Opět vycházíme z německého standardu 30E/360. Měsíčně Michal posílá $P = 4\,000$ Kč.

Nyní spočítáme celkový počet vkladů. Michal bude spořit 5 let a vklady posílá měsíčně

$$n = 5 \cdot 12 = 60\,.$$

a) Ze zadání můžeme vyčíst, že peníze posílá na začátku každého měsíce, tedy použijeme vzorec (3.1) a dostaneme

$$P_{60} = 4\,000 \cdot \left(1 + 0{,}051 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0{,}051 \cdot \frac{30}{360}\right)^{60} - 1}{0{,}051 \cdot \frac{30}{360}}\,.$$

Po zaokrouhlení výsledku na 2 desetinná místa

$$P_{60} = 273\,878{,}60\,\text{Kč}.$$

Pokud bude banka posílat úroky zpět na spořící účet, bude mít Michal po absolvování pětiletého studia naspořeno 273 878,60 Kč.

b) Částky na spořícím a běžném účtě můžeme počítat odděleně a nakonec sečíst, protože se nedělají úroky z úroků.

Spořící účet: Jelikož posílá na tento účet 4 000 Kč měsíčně, částka na spořícím účtě bude po 60 měsících bude

$$P_s = 60 \cdot 4\,000 = 240\,000\,\text{Kč}.$$

Běžný účet: Pro výpočet částky na běžném účtě musíme ještě přepočítat úrokovou míru z roční na měsíční

$$i = 0{,}051 \cdot \frac{30}{360} = 0{,}00425. \tag{3.3}$$

Na konci prvního měsíce bude Michal mít na běžném účtě

$$P_1 = 4\,000 \cdot 0{,}00425\,\text{Kč}.$$

Na konci druhého měsíce bude mít

$$P_2 = 4\,000 \cdot 0{,}00425 + 2 \cdot 4\,000 \cdot 0{,}00425\,\text{Kč}.$$

Na konci třetího měsíce bude mít

$$P_3 = 4\,000 \cdot 0{,}00425 + 2 \cdot 4\,000 \cdot 0{,}00425 + 3 \cdot 4\,000 \cdot 0{,}00425\,\text{Kč}.$$

Můžeme vidět, že částka na běžném účtě tvoří aritmetickou řadu (1.2)
s diferencí $d = 4\,000 \cdot 0{,}00425$. Dále známe první člen $a_1 = P_1$ a poslední člen

$$a_{60} = P_{60} = 60 \cdot 4\,000 \cdot 0{,}00425\,\text{Kč}.$$

Podle vzorce součet této řady je

$$\frac{60 \cdot (4\,000 \cdot 0{,}00425 + 60 \cdot 4\,000 \cdot 0{,}00425)}{2} = 31\,110\,\text{Kč}.$$

Nyní sečteme částku ze spořícího a běžného účtu. Dostáváme

$$240\,000 + 31\,110 = 271\,110\,\text{Kč}.$$

Pokud banka bude posílat úroky na běžný účet, naspoří po 60 měsících 271 110 Kč. △

Nyní spočítáme rozdíl výsledných částek těchto dvou příkladů.

$$273\,878{,}60 - 271\,110 = 2\,768{,}6\,\text{Kč}.$$

Způsobem a) získal Michal o 2 768,6 Kč více než způsobem b). Můžeme vidět, že způsob b) je pro banku výhodnější a způsob a) je zase výhodnější pro Michala.

Kapitola 4

Inflace

Inflace je znehodnocování měny způsobené růstem cen.

Míra inflace je relativní nárůst cenového indexu za příslušný rok. Cenový index vychází z maloobchodních cen vybraných položek zboží a služeb. Značí se i_i a počítá se následujícím vzorcem

$$i_i = \frac{B - A}{A}, \tag{4.1}$$

kde B je *cenový index* na konci roku a A *cenový index* na začátku roku.

Následující tabulka průměrné inflace v České republice v letech ukazuje, jak obrovský nárůst byl v posledních letech.

Rok	Průměrná míra inflace v ČR
2016	0,7 %
2017	2,5 %
2018	2,1 %
2019	2,8 %
2020	3,2 %
2021	3,8 %
2022	15,1 %
2023	10,7 %

Zdroj: Český statistický úřad

Míra inflace je veřejná a pro celý stát stejná hodnota. Cenový index přitom vychází z maloobchodních cen souboru vybraných položek zboží a služeb(například chleba, mléko, ale i dříví a jiné).

Pro zjednodušení si spočítáme cenový index na základě pouze jednoho údaje.

Příklad 4.1. Na začátku roku 2023 stál chleba 52 Kč. Na konci tohoto roku ten stejný chleba stál 60 Kč. Spočítejte míru inflace roku 2023 na základě těchto údajů.

Řešení. V zadání vidíme že cenový index na konci roku B bude 60 Kč a cenový index na začátku roku A bude 52 Kč. Dosadíme do vzorce (4.1) a dostaneme

$$i_i = \frac{60 - 52}{52} = 0{,}1538\,.$$

Míra inflace na základě tohoto údaje v roce 2023 byla 15,38 %. △

Oficiální zdroje uvádějí průměrnou inflaci v roce 2023 10,7 %, avšak nám vyšla 15,38 %. Můžeme vidět, že záznam o jediném produktu na její spočítání nestačí a dojde k hrubé nepřesnosti.

Následující tabulka porovnává inflaci v roce 2023 v ČR a ve vybraných evropských zemích.

Země	Průměrná míra inflace v Evropských zemích (2023)
ČR	10,7 %
Slovensko	11,0 %
Německo	5,9 %
Francie	5,7 %
Velká Británie	4,0 %
Polsko	11,6 %

Reálná úroková míra i_r vzniká úpravou *nominální úrokové míry* i o inflaci. Při nízkých hodnotách *míry inflace* i_i lze reálnou úrokovou míru vkladů vyjádřit vztahem

$$\boxed{i_r \approx k \cdot i - i_i\,,} \tag{4.2}$$

kde k je *zdaňovací koeficient*. Většinou je $k = 0,85$, protože je daň 15 %.

Příklad 4.2. Spočítejte reálnou úrokovou míru v roce 2023 svého spořícího účtu v bance M, jestliže úroková míra uvedená bankou pro tento účet byla 5,1 % před zdaněním a průměrná roční míra inflace v ČR v roce 2023 byla 10,7 %.

Řešení. Daň je 15 %, tudíž zdaňovací koeficient k je 0,85. Nominální úroková míra i je 0,051 a míra inflace i_i je 0,107. Dosadíme do vzorce (4.2)

$$i_r \approx 0{,}85 \cdot 0{,}051 - 0{,}107 = -0{,}06365\,. \tag{4.3}$$

Reálná úroková míra vašeho spořícího účtu je zhruba -6,365 % tzn. v roce 2023 jste přišli na tomto účtě o 6,365 % financí kvůli vysoké inflaci. △

Reálná hodnota kapitálu je taková hodnota, která je upravena o inflaci. Odráží tak skutečnou kupní sílu peněz v daném roce. Neboli za věci/služby, které jsme byli schopni za určitou částku koupit, budeme muset nyní zaplatit více.

Uložíme-li do banky kapitál P na začátku roku za předpokladu, že banka úročí jednou na konci roku, je pak *reálná hodnota kapitálu* P_r na konci roku definovaná vztahem

$$\boxed{P_r = P \cdot (1 + i_r)\,,} \tag{4.4}$$

kde i_r je reálná úroková míra za ten daný rok.

Příklad 4.3. V roce 2023 byla průměrná míra inflace v ČR 10,7 %. Spočítejte, kolik korun zaplatím na konci roku 2023 průměrně za zboží, které na konci roku 2022 stálo 100 Kč?

Řešení. Máme kapitál P = 100 Kč, míra inflace je 0,107 ve tvaru desetinného čísla. Reálná hodnota kapitálu se bude počítat stejným vzorcem jako (4.4), kde za reálnou úrokovou míru rovnou mohu v tomto případě dosadit míru inflace. Dostaneme

$$P_r = 100 \cdot (1 + 0{,}107) = 110{,}7 K\check{c}.$$

Na konci roku 2023 průměrně zaplatíme za zboží 110,7 Kč. △

Kapitola 5

Shrnutí a další úlohy

5.1 Přehled vzorců z finanční matematiky

Na začátku této kapitoly si připomeneme všechny vzorce, které jsme si v této práci odvodili. Ve všech uvedených vzorcích se aplikuje německý standart 30E/360.

Nejdříve si definujeme základní proměnné, které jsou ve vzorcích užity.

n	je počet úrokovacích období,
t	je počet dní úrokovacího období,
i	je úroková míra po zdanění ve tvaru desetinného čísla,
P	je počáteční kapitál,
P_n	je celková částka.

- **Jednoduché úročení**

$$P_n = P \cdot (1 + i \cdot \frac{t}{360} \cdot n).$$

- **Složené úročení**

$$P_n = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^n.$$

- **Půjčka/Úvěr**

P	je poskytnutý úvěr,
a	je anuitní splátka.

$$a = \frac{P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^n \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{\left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}.$$

- **Spoření**

  P je částka ukládaná každé úrokovací období.

  a) Kapitál P je ukládán na začátku každého úrokovacího období

$$P_n = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{i \cdot \frac{t}{360}}.$$

  b) Kapitál P je ukládán na konci každého úrokovacího období

$$P_n = P \cdot \frac{\left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{i \cdot \frac{t}{360}}.$$

- **Reálná úroková míra**

  k je zdaňovací koeficient,
  i_i je míra inflace v daném roce.

$$i_r \approx k \cdot i - i_i\,.$$

- **Reálná hodnota kapitálu P**

$$P_r = P \cdot (1 + i_r)\,.$$

5.2 Doplňující úlohy

Tato část kapitoly obsahuje příklady na všechny typy úloh této práce. Je třeba rozeznat, jaký vzorec nebo postup je zapotřebí použít.

Příklad 5.1. Uložil jste do banky 150 000 Kč na spořící účet s roční úrokovou sazbou 6,9 % p.a. Banka tyto úroky posílá na váš druhý (běžný) účet, tudíž úroky se dále nezhodnocují. Za 2 roky a 100 dní jste tento účet zrušil. Kolik peněz budete mít celkem za tuto dobu (původní vklad + úroky)?

Řešení. Jelikož se úroky dále nezhodnocují, tak můžeme použít jednoduché úročení. Rozdělíme si příklad na 2 části, celková částka P_2 za 2 roky a úrok u za zbylých 100 dní. Počáteční vklad $P = 150000$ Kč. Úroková sazba vyjádřena ve tvaru desetinného čísla $i = 0{,}069$.

Nejdříve spočítáme výsledný kapitál za 2 roky. V tomto případě bude úrokovací období ve dnech $t = 360$ a počet úrokovacích období $n = 2$. Dosadíme do vzorce (1.9) a dostáváme

$$P_2 = 150\,000 \cdot (1 + 0{,}069 \cdot \frac{360}{360} \cdot 2) = 170\,700\,\text{Kč}.$$

Nyní dopočítáme úrok za zbylých 100 dní. Tedy úroková doba $t = 100$ dní a počet úrokovacích období(těchto dob) $n = 1$. Jelikož potřebujeme získat pouze úrok za tuto dobu, tak dosadíme do vzorce (1.8) a dostaneme

$$u = 150\,000 \cdot 0{,}069 \cdot \frac{100}{360} \cdot 1 = 2\,875\,\text{Kč}.$$

Nakonec tyto dvě spočtené částky sečteme a dostaneme

$$P_c = 170\,700 + 2\,875 = 173\,575\,\text{Kč}.$$

Celkem jste po 2 letech a 100 dnech získal 173 575 Kč. △

Poznámka. Příklad se dal počítat i jednodušeji. Kdybychom nedělili příklad na dvě části, ale rovnou si určili úrokovou dobu 820 dní (2 roky + 100 dní) a počet těchto dob by byl $n = 1$, došli bychom ke stejnému výsledku. Toto druhé řešení je více intuitivní.

Příklad 5.2. Paní Nováková si dlouhé roky odkládala peníze do domácího trezoru. Celkem na začátku roku 2019 měla v trezoru 500 000 Kč a dále až do začátku roku 2024 peníze zůstaly uvnitř a paní Nováková mezi těmito lety nespořila. Spočítejte, jaká bude reálná hodnota těchto peněz na začátku roku 2024, použijte data o průměrné inflaci v ČR z tabulky 4.

Řešení. Jelikož se průměrná míra inflace každý rok liší, nezbývá nám, než spočítat každý rok zvlášť. V zadání je dále uvedeno, že peníze měly tuto hodnotu na začátku roku 2019, tudíž tento rok budeme také počítat.

Průměrná míra inflace v roce 2019 byla 0,028 ve tvaru desetinného čísla. Použijeme vzorec (4.4), kde za i_r budeme brát zápornou hodnotu průměrné míry inflace za tento rok, jelikož oproti příkladu (4.3) potřebujeme spočítat ztrátu.
Hodnota peněz na začátku roku 2020 byla

$$P_{2020} = 500\,000 \cdot (1 - 0{,}028) = 486\,000\,\text{Kč}.$$

Nyní počítáme další rok s 486 000 *Kč*. Průměrná míra inflace v roce 2020 byla 0,032. Hodnota peněz na začátku roku 2021 byla

$$P_{2021} = 486\,000 \cdot (1 - 0{,}032) = 470\,448\,\text{Kč}.$$

Průměrná míra inflace v roce 2021 byla 0,038. Hodnota peněz na začátku roku 2022 byla

$$P_{2022} = 470\,448 \cdot (1 - 0{,}038) = 452\,570{,}98\,\text{Kč}.$$

Průměrná míra inflace v roce 2022 byla 0,151. Hodnota peněz na začátku roku 2023 byla

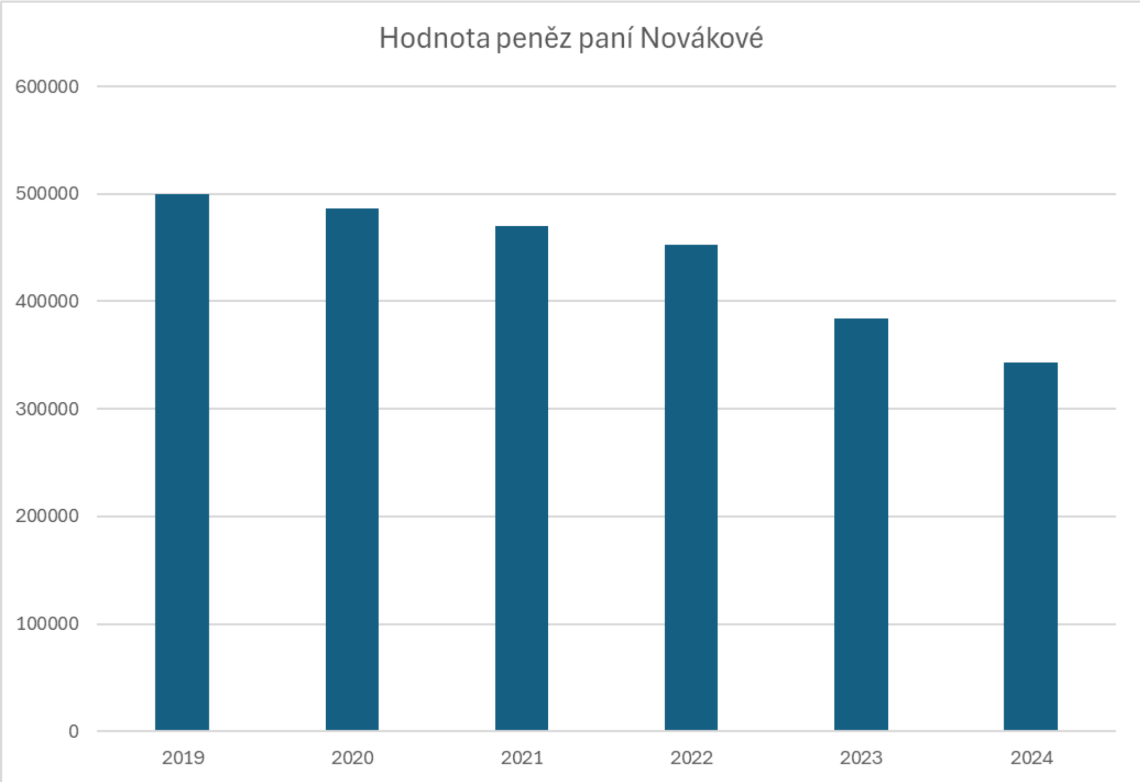
$$P_{2023} = 452\,570{,}98 \cdot (1 - 0{,}151) = 384\,232{,}76\,\text{Kč}.$$

Průměrná míra inflace v roce 2023 byla 0,107. Hodnota peněz na začátku roku 2024 byla

$$P_{2024} = 384\,232{,}76 \cdot (1 - 0{,}107) = 343\,119{,}85\,\text{Kč}.$$

Peníze, které měly na začátku roku 2019 reálnou hodnotu 500 000 Kč, mají na začátku roku 2024 hodnotu 343 119,85 *Kč*. △

Poznámka. Můžeme vidět, že ztráta peněz byla značná. Zde si graficky ukážeme, jak se hodnota těchto peněz měnila v letech pro lepší představu.



Příklad 5.3. Půjčil jste si od kamaráda 50 000 Kč s dohodou, že za každý další rok nesplacení dluhu mu budete dlužit o 5 % více než v předchozím roce. Spočítejte, kolik mu budete dlužit za 5 a za 10 let?

Řešení. Jelikož každý rok bude částka větší o 5 % než v roce předešlém, musíme počítat úroky z úroků. Pro výpočet příkladu použijeme vzorec na složené úročení.

Protože máme roční úročení, bude počet dní úrokovacího období $t = 360$. Počáteční kapitál $P = 50\,000$ Kč, úroková míra $i = 0,05$ a počet úrokovacích období $n = 5$ let. Dosadíme do (1.10) a dostáváme

$$P_5 = 50\,000 \cdot \left(1 + 0,05 \cdot \frac{360}{360}\right)^5 = 63\,814{,}08\,\text{Kč}.$$

Nyní v druhé části příkladu bude počet úrokovacích období $n = 10$ let. Dosadíme do stejného vzorce a dostaneme

$$P_{10} = 50\,000 \cdot \left(1 + 0,05 \cdot \frac{360}{360}\right)^{10} = 81\,444{,}73\,\text{Kč}.$$

Za 5 let mu budete dlužit 63 814,08 Kč a za 10 let 81 444,73 Kč.

Příklad 5.4. Rozhodl jste se investovat do dluhopisového fondu. Každý měsíc posíláte na konci úrokovacího období částku 3 000 Kč. Tomuto fondu se však vůbec nedařilo a každoroční výnos fondu činil – 3 % p.a. Jaké hodnoty dosáhne tato investice po 5 letech a jaká byla vaše ztráta?

Řešení. Jelikož jsou vklady posílány na konci úrokovacího období, použijeme vzorec pro spoření s vkladem na konci úrokovacího období (3.2). Měsíční vklad $P = 3\,000$ Kč, úroková míra $i = -0,03$, počet dní úrokovacího období $t = 30$ a počet těchto úrokovacích období $n = 12 \cdot 5 = 60$. Dosadíme a dostaneme

$$P_{60} = 3\,000 \cdot \frac{\left(1 - 0,03 \cdot \frac{30}{360}\right)^{60} - 1}{-0,03 \cdot \frac{30}{360}} = 167\,344{,}39\,\text{Kč}.$$

Po 5 letech tato investice dosáhne hodnoty 167 344,39 Kč.

Nyní spočítáme ztrátu za těchto pět let. Kdybychom měsíční vklad $P = 3\,000$ Kč pouze ukládali bez zhodnocování, budeme mít po 5 letech (60 měsících)

$$P_{60} = 3000 \cdot 60 = 180\,000\,\text{Kč}.$$

Odečteme investici od této částky a dostaneme

$$180\,000 - 167\,344{,}39 = 12\,655{,}61\,\text{Kč}.$$

Ztráta za 5 let činila 12 655,61 Kč. △

Poznámka. Tento příklad ilustroval možnost dosazovat do vzorce i záporné hodnoty úrokové míry i. Tuto schopnost mají všechny vzorce, které jsme shrnuli na začátku této kapitoly 5.1.

V tomto příkladě byl pro zjednodušení každoroční výnos stále stejný, avšak v reálném světě investic je často velmi proměnlivý. Průměrný výnos v letech tak často bývá zhruba stejný jako u spořícího účtu v bance. Pokud tedy chcete mít stabilitu výnosu, měli byste volit spíše spořící účet v bance.

Příklad 5.5. Sjednal jste si s bankou R minutovou půjčku na 200 000 Kč s roční úrokovou sazbou 4,91 % p.a., kterou chcete splácet 60 měsíců. Spočítejte, jaká bude měsíční splátka a kolik celkem bance zaplatíte.

Řešení. Použijeme vzorec odvozený v druhé kapitole pro půjčku (2.1). Půjčená částka $P = 200\,000$ Kč, úroková míra ve tvaru desetinného čísla $i = 0,0491$, počet splátek $n = 60$ a jelikož je splácení měsíční, bude délka úrokovacího období $t = 30$ dní. Dostáváme měsíční splátku

$$a = \frac{200\,000 \cdot \left(1 + 0{,}0491 \cdot \dfrac{30}{360}\right)^{60} \cdot 0{,}0491 \cdot \dfrac{30}{360}}{\left(1 + 0{,}0491 \cdot \dfrac{30}{360}\right)^{60} - 1} = 3766\,\text{Kč}.$$

Měsíční splátka pro tuto půjčku bude 3 766 Kč.

Nyní spočítáme, kolik zaplatíte celkem za tuto půjčku. Víme, že jste tuto sumu platil celkem 60 měsíců. Tedy

$$P_n = 60 \cdot 3766 = 225\,960\,\text{Kč}.$$

Celkem bance zaplatíte 225 960 Kč. △

Příklad 5.6. Paní Pospíšilová se rozhodla spořit si peníze na zážitkovou dovolenou do exotické destinace. Spořila celkem 3 roky. Začíná spořit s měsíčním cílem uložit 2000 Kč na spořící účet v bance C. Po prvním roce zjistí, že si může dovolit o trochu víc spořit, takže svůj měsíční příspěvek zvyšuje o 200 Kč. Po druhém roce příspěvek zase zvyšuje o 300 Kč měsíčně. Spořící účet, který si zvolila, měl v prvním roce roční úrokovou míru 6 % p. a. ve druhém roce 5,7 % p. a. a ve třetím roce 5,5 % p. a. Všechny tyto sazby jsou uvedeny po zdanění. Kolik tedy celkem za tyto tři roky naspořila?

Řešení. Jelikož se jak vklady, tak úrokové sazby každý rok mění, musíme každý tento rok spočítat zvlášť. Pro všechny roky bude délka úrokovacího období $t = 30$ dní, počet úrokovacích období $n = 12$.

První rok měsíční vklad P činil 2 000 Kč a roční úroková míra spořícího účtu byla 0,06. Spočítáme tedy naspořenou částku za první rok pomocí vzorce (3.1) a dostaneme

$$P_1 = 2\,000 \cdot \left(1 + 0{,}06 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0{,}06 \cdot \frac{30}{360}\right)^{12} - 1}{0{,}06 \cdot \frac{30}{360}} = 24\,794{,}48\,\text{Kč}.$$

Nyní spočítáme druhý rok, kde měsíční vklad P činil 2 200 Kč a roční úroková míra spořícího účtu byla 0,57. Dostaneme

$$P_2 = 2\,200 \cdot \left(1 + 0{,}57 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0{,}57 \cdot \frac{30}{360}\right)^{12} - 1}{0{,}57 \cdot \frac{30}{360}} = 36\,154{,}58\,\text{Kč}.$$

A analogicky pro třetí rok, kde měsíční vklad P činil 2 500 Kč a roční úroková míra spořícího účtu byla 0,55. Dostaneme

$$P_3 = 2\,500 \cdot \left(1 + 0{,}55 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0{,}55 \cdot \frac{30}{360}\right)^{12} - 1}{0{,}55 \cdot \frac{30}{360}} = 40\,626{,}70\,\text{Kč}.$$

Nyní při sčítání těchto let musíme vzít ještě v potaz, že první a druhý rok se ještě úročily

$$P_n = P_1 \cdot (1 + 0{,}057 + 0{,}055) + P_2 \cdot (1 + 0{,}055) + P_3\,.$$

Dosadíme naše spočtené hodnoty

$$P_n = 24\,794{,}48 \cdot (1 + 0{,}057 + 0{,}055) + 36\,154{,}58 \cdot (1 + 0{,}055) + 40\,626{,}70\,\text{Kč}$$
$$P_n = 106\,341{,}24\,\text{Kč}.$$

Celkem za tři roky našetřila tímto způsobem 106 341,24 Kč. △

Příklad 5.7. Pan Dvořák si sjednal u banky M stavební spoření s roční úrokovou sazbou 4 % p.a. na 6 let. Hodlá na tento účet posílat 5 000 Kč měsíčně vždy na začátku každého úrokovacího období (vklady se zhodnocují každý měsíc). Banka si za vedení účtu stavebního spoření v této výši bere 300 Kč ročně. Státní příspěvek pro výši takového spoření činí 1 000 Kč. Kolik bude mít pan Dvořák na konci tohoto stavebního spoření?

Řešení. V tomto příkladě budeme muset počítat zvlášť klientovy vklady a státní příspěvek s poplatkem.

Nejdříve spočítáme státní příspěvek s poplatkem. Jelikož obě tyto částky pan Dvořák platí nebo dostává ročně, můžeme pro zjednodušení tyto dvě částky od sebe odečíst. Dostaneme

$$1\,000 - 300 = 700\,\text{Kč}.$$

Zjednodušeně Pan Dvořák bude dostávat ročně pouze $P = 700$ Kč. Tato částka se však úročí každý rok roční úrokovou sazbou $i = 0,04$ po dobu $n = 6$ let. Počet dní tohoto úrokovacího období $t = 360$. Jelikož se tato částka bude přičítat na konci roku, použijeme vzorec pro spoření s vkladem na konci úrokovacího období (3.2) a dostaneme

$$P_n = 700 \cdot \frac{\left(1 + 0,04 \cdot \frac{360}{360}\right)^6 - 1}{0,04 \cdot \frac{360}{360}} = 4\,643{,}08\,\text{Kč}.$$

Z rozdílu příspěvků a poplatků dostane pan Dvořák za 6 let 4 643,08 Kč.

Nyní spočítáme samotné spoření. Měsíční vklad $P = 5\,000$ Kč. Protože je tento měsíční vklad na začátku každého úrokovacího období, použijeme vzorec (3.1). Roční úroková sazba $i = 0,04$, počet dní úrokovacího období $t = 30$ a počet těchto období $n = 12 \cdot 6 = 72$. Dosadíme a dostaneme

$$P_n = 5000 \cdot \left(1 + 0,04 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0,04 \cdot \frac{30}{360}\right)^{72} - 1}{0,04 \cdot \frac{30}{360}} = 407\,466{,}53\,\text{Kč}.$$

Ze svých měsíčních vkladů bude tedy mít pan Dvořák za 6 let 407 466,53 Kč.

Nyní tyto dvě spočítané částky sečteme a dostaneme

$$4\,643{,}08 + 407\,466{,}53 = 412\,109{,}61\,\text{Kč}.$$

Celkem tedy bude mít ze stavebního spoření za 6 let 412 109,61 Kč. △

Poznámka. Stavební spoření se díky státnímu příspěvku zdá být výhodnější než standartní spoření. Některé banky vás dokonce lákají na stejný úrok jako u spořícího účtu s garancí 2 let, ale poté ho rapidně zmenší. Další nevýhodou je, že peníze nemůžete těchto 6 let vybrat a po těchto 6 letech vás banka často láká na prodloužení této doby se zdárně výhodnějším úrokem.

Poslední kapitolu zakončíme příkladem, který je v této práci jedním z nejdůležitějších. Tato problematika je totiž jednou z důležitých finančních otázek v životě.

Příklad 5.8. Uvažte následující dvě situace a porovnejte jejich cenu.

a) Plánujete si nechat postavit dům a vzali jste si hypotéku ve výši 6 000 000 Kč na 30 let. Banka K vám nabízí hypotéku s úrokovou mírou 7 % (Pro zjednodušení nebereme nyní v potaz fixace, proto je úroková míra tak vysoká). Úroková míra je uvedena po zdanění a se započítanými poplatky. Dále počítejte s tím, že abyste si mohl vzít tuto hypotéku, musíte mít našetřeno 666 666 Kč.

b) Plánujete zůstat 30 let v pronájmu v domu, který je srovnatelný s domem z úlohy a). Počítejte s tím, že nájem za prvních 10 let bude činit 25 000 Kč, dalších 10 let 35 000 Kč a posledních 10 let 45 000 Kč.

Řešení.

a) Nejdříve spočítáme výši měsíční splátky (anuitu a) pomocí vzorce (2.1), ze které spočítáme výši hypotéky P_{360}. Půjčená částka $P = 6\,000\,000$ Kč, úroková míra $i = 0,07$, počet dní úrokovacího období $t = 30$ dní a počet těchto úrokovacích období $n = 360$ měsíců. Bude tedy měsíční splátka

$$a = \frac{6\,000\,000 \cdot \left(1 + 0{,}07 \cdot \dfrac{30}{360}\right)^{360} \cdot 0{,}07 \cdot \dfrac{30}{360}}{\left(1 + 0{,}07 \cdot \dfrac{30}{360}\right)^{360} - 1} = 39\,918{,}15\,\text{Kč}.$$

Za toto období proběhne celkem 360 anuit, tedy výše hypotéky bude

$$P_{360} = 360 \cdot 39\,918{,}15 = 14\,370\,533{,}9\,\text{Kč}.$$

Nakonec ještě musíme přičíst počáteční kapitál nutný k uzavření této hypotéky. Dostaneme

$$P_h = 14\,370\,533{,}9 + 666\,666 = 15\,037\,199{,}9\,\text{Kč}.$$

Tento dům nás tedy celkem vyjde na 15 037 199,9 Kč.

b) Jelikož se nájem v průběhu mění, musíme spočítat každých 10 let zvlášť.
Nájem za měsíc $P = 25\,000$ Kč. Jelikož se nájem platí měsíčně a rok má 12 měsíců, bude celková částka za prvních 10 let

$$P_{10} = 25\,000 \cdot 120 = 3\,000\,000\,\text{Kč}.$$

Nájem se zvýší na 35 000 Kč, celková částka za dalších 10 let bude

$$P_{20} = 35\,000 \cdot 120 = 4\,200\,000\,\text{Kč}.$$

Posledních 10 let nájem bude 45 000 Kč, celková částka tedy bude

$$P_{30} = 45\,000 \cdot 120 = 5\,400\,000\,\text{Kč}.$$

Nyní tyto nájmy sečteme a dostaneme

$$P_n = 3\,000\,000 + 4\,200\,000 + 5\,400\,000 = 12\,600\,000\,\text{Kč}.$$

Za 30 let v tomto podnájmu celkem zaplatíte 12 600 000 Kč.

Nyní spočítáme rozdíl, mezi hypotékou a podnájmem.

$$15\,037\,199{,}9 - 12\,600\,000 = 2\,437\,199{,}90\,\text{Kč}.$$

Za hypotéku zaplatíte sice o 2 437 199,90 Kč více, ale dům, který za ni postavíte, zůstane ve vašem vlastnictví a tudíž je později zpeněžitelný. △

Závěr

Tato práce vycházela primárně z učebních textů [1] a [3]. V současné době se na středních školách nejvíce používá učebnice [2], která rozebírá stejná témata jako jsou v této práci. V této učebnici není vůbec zavedené téma inflace, které je v dnešní době velice důležité a absolventi středních škol se o ní dozvídají až ze svého života. Dále učebnice postrádá odvození a podrobnější vysvětlení vzorců z finanční matematiky a více příkladů na toto téma. Poznamenejme, že řada učebnic nakladatelství Didaktis má 10 dílů a pouze čtvrtina jednoho dílu ([2]) je věnována finanční matematice, což je vzhledem k obsáhlosti a důležitosti tohoto tématu nedostatečné. Učebnice [4] je určena pro základní školy a obsahuje základní úlohy na jednoduché a složené úročení.

Tato práce může být dobrým doplňujícím materiálem k učebnici [2], jak pro učitele, tak pro studenty středních škol.

Seznam použité literatury

[1] RADOVÁ, Jarmila, Petr DVOŘÁK a Jiří MÁLEK. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada, 2013. 304 s. ISBN 9788024748313.

[2] ZEMEK, Václav; ZEMKOVÁ, Kristýna; KRÁLOVÁ, Magda; NAVRÁTIL, Milan a KOZÁK, Petr. *Matematika pro střední školy.* Brno: Didaktis, [2017-2020]. ISBN 978-80-7358-267-8.

[3] ODVÁRKO, Oldřich. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2005. 198 s. ISBN 8071963038.

[4] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* Ilustroval Martin MAŠEK. Učebnice pro základní školy (Prometheus). Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-194-9.