MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2024 Martin Hanslian

MASARYKOVA
UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Aplikace matematické analýzy pro učitele

Bakalářská práce

Martin Hanslian

Vedoucí práce: prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc. **Brno 2024**

Bibliografický záznam

Autor:	Martin Hanslian Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Aplikace matematické analýzy pro učitele
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Akademický rok:	2023/2024
Počet stran:	vii + 51
Klíčová slova:	diferenciální počet, integrální počet, číselné řady, nekonečné řady, aplikace

Bibliographic Entry

Author:	Martin Hanslian Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Application of calculus for teachers
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Mathematics with a focus on education
Supervisor:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Academic Year:	2023/2024
Number of Pages:	vii + 51
Keywords:	differential calculus, integral calculus, number series, infinite series, applications

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá aplikacemi diferenciálního a integrálního počtu a číselných řad. Práce ukazuje jejich různorodá uplatnění v praktickém životě, například v medicíně, ekonomii či chemii. Každá ze tří kapitol obsahuje nejprve základní teorii a následně její aplikace. Tento text by měl posloužit čtenáři jako inspirace a motivace ke studiu dané oblasti matematiky. Práce je koncipována jako učební text a sbírka slovních úloh pro středoškolské učitele a studenty.

Abstract

This bachelor thesis deals with applications of differential and integral calculus and numerical series. The work shows their various applications in practical life, such as in medicine, economics, or chemistry. Each of the three chapters first presents the basic theory and then its application. This text should serve as an inspiration and motivation for the reader to study the given area of mathematics. The thesis is designed as a textbook and a collection of word examples for high school teachers and students.

MUNI
SCI

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KOTLÁŘSKÁ 2, 611 37 BRNO
IČ: 00216224
DIČ: CZ00216224

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2023/2024

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Student:	Martin Hanslian
Program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Specializace:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Hudební výchova se zaměřením na vzdělávání

Ředitel *ústavu* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Aplikace matematické analýzy pro učitele
Název práce anglicky:	Applications of mathematical analysis for teachers
Jazyk závěrečné práce:	čeština

Oficiální zadání:
Vypracujte učební text na dané téma pro učitelské studium matematiky. Vyberte vhodné aplikace se zaměřením na předmět MUC 27 Seminář z aplikací matematické analýzy.

Literatura:

GREENSPAN, Harvey P. a David J. BENNEY. *Calculus, an introduction to applied mathematics*. 2nd ed. Toronto: McGraw-Hill Ryerson Limited, 1986. xi, 836. ISBN 0075489260.

MIZRAHI, Abe a Michael SULLIVAN. *Mathematics : an applied approach*. 6th ed. New York: John Wiley & Sons, 1996. xix, 906. ISBN 0471107018.

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Datum zadání práce:	29. 6. 2023
V Brně dne:	3. 3. 2024

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Martin Hanslian, 23. 10. 2023
prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc., 30. 10. 2023
RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 31. 10. 2023

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. RNDr. Zuzaně Došlé, DSc. za pomoc při psaní mé bakalářské práce, za trpělivost, za cenné rady a připomínky a za čas, který mi věnovala. Dále děkuji mé rodině a nejbližším, kteří mě při tvorbě této práce po celou dobu podporovali.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 1. května 2024 . . . .

Martin Hanslian

Obsah

Úvod

V této bakalářské práci jsou ukázány různorodé aplikace diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné a číselných řad v oblasti medicíny, chemie, biologie, stavitelství, ekonomie a finanční matematiky, pravděpodobnosti a další. Aplikační úlohy jsou koncipovány pro středoškolské učitele matematiky, kteří pomocí nich mohou studentům ukázat konkrétní využití dané oblasti matematiky v praxi. Z tohoto důvodu jsou zde vynechány úlohy, ke kterým je nezbytná znalost z oblasti diferenciálních rovnic či fyziky. Tento text má zároveň sloužit jako doplňující sbírka aplikačních úloh pro předmět MUC 27 Seminář z aplikací matematické analýzy.

Práce je rozdělena do tří kapitol - *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, *Integrální počet funkcí jedné proměnné* a *Číselné řady*. Každá z těchto kapitol obsahuje nejprve přehled základních teoretických poznatků a posléze deset aplikačních úloh na každé téma. Všechny příklady v tomto textu jsou řešené. Práce obsahuje i názorné či doplňující obrázky, z nichž některé byly převzaty od jiných autorů a na konci práce jsou řádně ozdrojovány.

Většina zadání uvedených úloh byla převzata a upravena z neřešených úloh z knihy [2], některé úlohy jsou původní.

Tato práce byla vysázena systémem LaTeX v prostředí Overleaf. Grafy a obrázky byly vypracovány v programu FX Graph a FX Draw.

Kapitola 1

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

V této kapitole se budeme zabývat diferenciálním počtem funkcí jedné proměnné. Nejdříve zavedeme nejdůležitější pojmy a následně uvedeme některé aplikace na příkladech ze skutečného života.

1.1 Význam a definice derivace

Definice 1.1.1. Nechť je dána funkce f a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$. Je-li tato limita vlastní, nazývá se číslo $f'(x_0)$ *vlastní derivace funkce f v bodě x_0*. Je-li tato limita nevlastní, nazývá se $f'(x_0)$ *nevlastní derivace funkce f v bodě x_0*.

Poznámka. Někdy se můžeme setkat i se zavedením substituce $h = x - x_0$. V tomto případě by byla výše uvedená limita ve tvaru:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definice 1.1.2. Nechť je dána funkce f a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$f'(x_0)^+ = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{resp. } f'(x_0)^- = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací zprava,* resp. *zleva funkce f v bodě x_0*.

Poznámka. Z geometrického hlediska je derivace funkce f v bodě x_0 směrnicí tečny procházející bodem $f(x_0)$. Tedy rovnice tečny funkce f v libovolném bodě $x_0 \in D(f)$ je:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

Věta 1.1.1. Nechť je dána funkce f. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci a zároveň:

- $f'(x_0) > 0$, potom je funkce f v bodě x_0 rostoucí.
- $f'(x_0) < 0$, potom je funkce f v bodě x_0 klesající.

Věta 1.1.2. Nehchť má funkce f vlastní derivaci na otevřeném intervalu $I = (a,b)$. Pak je funkce f na intervalu I:

- rostoucí (klesající) právě tehdy, když $f'(x) > 0 \ (f'(x) < 0)$ pro všechna $x \in I$,
- nerostoucí (neklesající) právě tehdy, když $f'(x) \leq 0 \ (f'(x) \geq 0)$ pro všechna $x \in I$.

Věta 1.1.3. Nechť mají funkce f a g vlastní derivaci v bodě x_0.
Potom platí:

- $(cf(x_0))' = c(f'(x_0)),\, c \in \mathbb{R}$
- $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- jestliže $g(x_0) \neq 0$, potom $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- $(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Věta 1.1.4. Pro derivace elementárních funkcí platí:

- $(c)' = 0,\, c \in \mathbb{R}$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1},\, n \in \mathbb{R}$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a),\, a \in \mathbb{R},\, a > 0$
- $(e^x)' = e^x$
- $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$
- $[\log_b(x)]' = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}, b \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1$
- $[\sin(x)]' = \cos(x)$
- $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
- $[\mathrm{tg}(x)]' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $[\mathrm{cotg}(x)]' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

  všude tam, kde jsou definovány.

Definice 1.1.3. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Potom *n-tou derivaci funkce f*, kterou značíme $f^{(n)}$, definujeme pomocí indukce:

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]', \quad f^{(0)} = f$$

všude tam, kde je definována.

Definice 1.1.4. Řekneme, že má funkce f v bodě x_0:

- *lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$ platí $f(x) \leq 0$ $(f(x) \geq 0)$,
- *ostré lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) < 0$ $(f(x) > 0)$.

Tyto body souhrnně nazýváme *lokální extrémy funkce f*.

Věta 1.1.5 (*Fermatova věta*)**.** Nechť je bod x_0 lokálním extrémem funkce f a nechť existuje $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce f.

Věta 1.1.6. Nechť f je funkce a x_0 bod takový, že $f'(x_0) = 0$.
Potom má funkce f v bodě x_0:

- *ostré lokální maximum*, jestliže $f''(x_0) < 0$,
- *ostré lokální minimum*, jestliže $f''(x_0) > 0$.

Věta 1.1.7. Nechť f je funkce, která je spojitá v bodě x_0 a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí $\mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Jestliže pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) < 0$ a pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$, $x > x_0$, je $f'(x) > 0$, pak má f v bodě x_0 *ostré lokální minimum*. (Obdobné tvrzení platí i pro *ostré lokální minimum*).

Jestliže je x_0 v předchozí větě stacionárním bodem funkce $f(x)$, věta jednoduše říká: Mění-li derivace při přechodu přes stacionární bod znaménko, je zde lokální extrém. Pokud derivace změní znaménko z kladného na záporné, nachází se v bodě x_0 lokální maximum funkce $f(x)$ a naopak.

Definice 1.1.5. Nechť je dána funkce f definovaná na intervalu M a bod $x_0 \in M$. Řekneme, že má funkce f na intervalu M v bodě x_0:

- *absolutní maximum*, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x_0) \geq f(x)$,
- *absolutní minimum*, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x_0) \leq f(x)$.

Mnoho aplikačních úloh vede k nalezení absolutních extrémů funkce. Z tohoto důvodu si zde představíme postup pro jejich nalezení:

1. Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, ve kterých neexistuje první derivace.

2. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.

3. Vypočteme funkční hodnotu v krajních bodech intervalu, jestliže do daného intervalu patří.

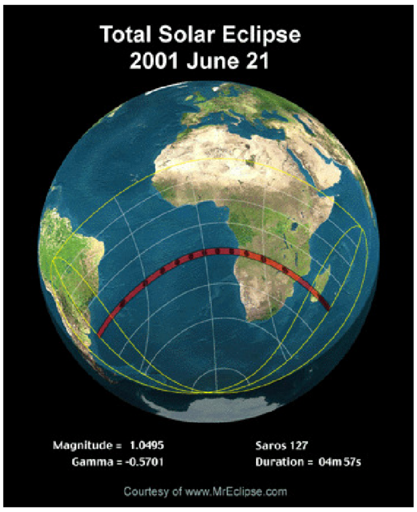
4. Z takto získaných funkčních hodnot vybereme tu nejmenší a největší. To je naše hledané absolutní minimum a maximum funkce.

1.2 Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné

Příklad 1.2.1. 21. června 2001 nastalo v Africe úplné zatmění Slunce. Mezi 12:00 a 13:00 UTC opisoval stín Měsíce na povrchu Země dráhu, kterou lze aproximovat pomocí funkce:

$$f(x) = \sqrt{138,1 - 5,025x + 0,2902x^2}\,,$$

kde x $(0 \leq x \leq 22)$ je východní zeměpisná délka a $f(x)$ jižní zeměpisná šířka, přičemž oba údaje jsou měřeny ve stupních (viz Obrázek 1.1). Najděte zeměpisnou délku a šířku bodu, který je na dráze stínu Měsíce nejseverněji.



Obrázek 1.1

Řešení: Nejdříve najdeme stacionární body funkce $f(x)$ a poté nalezneme její globální maximum na intervalu $[0,22]$. Platí

$$f'(x) = \frac{-0,025 + 2\cdot 0,2902x}{2\cdot\sqrt{138,1 - 5,025x + 0,2902x^2}} = 0\,,$$

odtud

$$5,025 = 2\cdot 0,2902x$$

a stacionární bod je

$$x = \frac{5,025}{2\cdot 0,2902} \approx 8,657^\circ\,.$$

Hodnota funkce $f(x)$ v tomto bodě je

$$f(8,657) = \sqrt{138,1 - 5,025\cdot 8,657 + 0,2902\cdot 8,657^2} \doteq \sqrt{116,347} = 10,786^\circ\,,$$

a v krajních bodech $f(0) \doteq 11,75^\circ$, $f(22) \doteq 12,96^\circ$.

Zeměpisné souřadnice bodu, který je na dráze stínu Měsíce nejseverněji, jsou $8,657^\circ$ východní délky a $10,786^\circ$ jižní šířky.

Příklad 1.2.2. Pokud se cizí předmět dostane člověku do průdušnice, začne kašlat. Rychlost kašle závisí na velikosti cizího předmětu. Předpokládejme, že člověk má průdušnici o poloměru 20 mm. Jestliže cizí předmět má poloměr r, pak je rychlost V, která je potřeba k vykašlání cizího tělesa z průdušnice, dána rovnicí:

$$V(r) = k(20r^2 - r^3), \quad 0 \leq r \leq 20,$$

kde k je kladná konstanta. Pro jak velký předmět je potřebná rychlost pro jeho vykašlání nejvyšší?

Řešení: Nejdříve spočítáme derivaci funkce V podle proměnné r:

$$V'(r) = k(40r - 3r^2).$$

Nyní najdeme stacionární body funkce $V(r)$:

$$V'(r) = (40r - 3r^2) = 0,$$

odtud

$$r(40 - 3r) = 0$$

a stacionární body jsou

$$r_1 = 0,\, r_2 = \frac{40}{3}.$$

Spočítáme funkční hodnotu funkce $V(r)$ ve stacionárních a krajních bodech intervalu $[0;20]$. Dostaneme

$$V(0) = 0,$$

$$V\left(\frac{40}{3}\right) = k \cdot \frac{32000}{27} > 0,$$

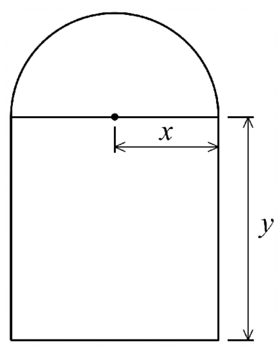
$$V(20) = k(20^3 - 20^3) = 0.$$

Z toho vyplývá, že pro předmět o poloměru $\frac{40}{3}$ mm je potřebná rychlost pro jeho vykašlání nejvyšší.

Příklad 1.2.3. Románské okno obdélníkového tvaru je zakončené půlkruhovým obloukem. Požadujeme, aby naše románské okno mělo obvod 24 dm. Jaké rozměry by mělo mít okno, aby jím mohlo procházet co nejvíce světla?

Řešení: Okno bude propouštět nejvíce světla právě tehdy, když bude mít maximální plochu. Nejprve si označme poloměr půlkruhu jako x. Jedna strana obdélníka bude mít tedy velikost $2x$. Druhou stranu obdélníka si označme y (viz Obrázek 1.2).
Obvod a plochu okna si můžeme zapsat jako:

$$o = 2y + 2x + \pi x = 24,$$
$$S = 2xy + \frac{\pi x^2}{2}.$$



Obrázek 1.2

Z první rovnice si vyjádříme $y = 12 - x - \frac{\pi x}{2}$. Toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice a následně z ní vytvoříme funkci S s proměnnou x:

$$S(x) = 24x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}.$$

Nyní budeme hledat maximum funkce $S(x)$. Jak je již z předpisu funkce patrné, jedná se o parabolu, která je otevřená ve směru záporné poloosy y a tedy bude mít pouze jedno lokální maximum. Platí

$$S'(x) = 24 - 4x - \pi x = 0,$$

odtud

$$x(-4-\pi) = -24,$$

z čehož plyne, že

$$x = \frac{24}{4+\pi}.$$

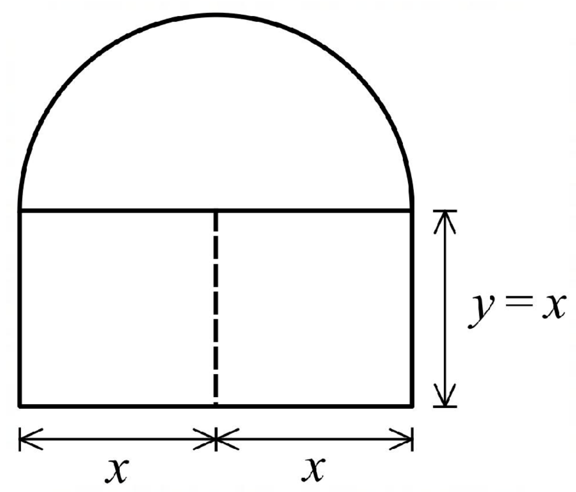
Tím jsme získali jeden ze dvou námi hledaných rozměrů, tedy x. Zbývá pouze dopočítat hodnotu y. Dosazením získáme

$$y = 12 - \frac{24}{4+\pi} - \frac{\pi\left(\frac{24}{4+\pi}\right)}{2} = \frac{24}{4+\pi}.$$

Hledané rozměry okna jsou

$$x = \frac{24}{4+\pi}\,[dm] \quad \text{a} \quad y = \frac{24}{4+\pi}\,[dm].$$

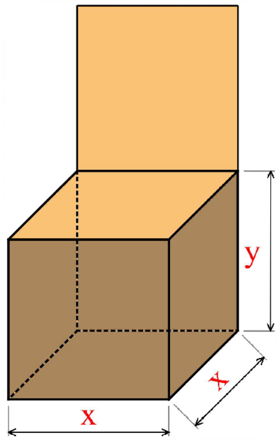
To znamená, že románské okno propouští nejvíce světla, je-li obdélník tvořen dvěma shodnými čtverci (viz Obrázek 1.3). Toto tvrzení platí pro libovolný požadovaný obvod.



Obrázek 1.3

Příklad 1.2.4. Firma na obaly chce začít s výrobou kartonových krabic o objemu 320 dm^3 se čtvercovým dnem. Náklady na výrobu 1 dm^2 dna jsou 0,5 Kč, víka 0,3 Kč a bočních stěn 0,1 Kč. Jaké rozměry musí mít krabice, aby náklady na její výrobu byly minimální?

Řešení: Budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladu. Označme si délku strany čtvercové podstavy x a výšku krabice y (viz Obrázek 1.4). Objem a obsah krabice můžeme poté zapsat jako



Obrázek 1.4

$$V = x^2 y = 320\,,$$
$$S = x^2 + x^2 + 4xy\,.$$

Z první rovnice vyjádříme

$$y = \frac{320}{x^2},\, x > 0\,.$$

Následným dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$S = x^2 + x^2 + \frac{1280}{x}\,.$$

Potom vytvoříme nákladovou funkci:

$$M(x) = 0,5x^2 + 0,3x^2 + 0,1 \cdot \frac{1280}{x}$$

a nalezneme její absolutní minimum pomocí derivace. Dostaneme

$$M'(x) = x + 0,6x - \frac{128}{x^2} = 0\,,$$

z toho plyne, že

$$1,6x^3 - 128 = 0$$

a tedy hledaný bod je

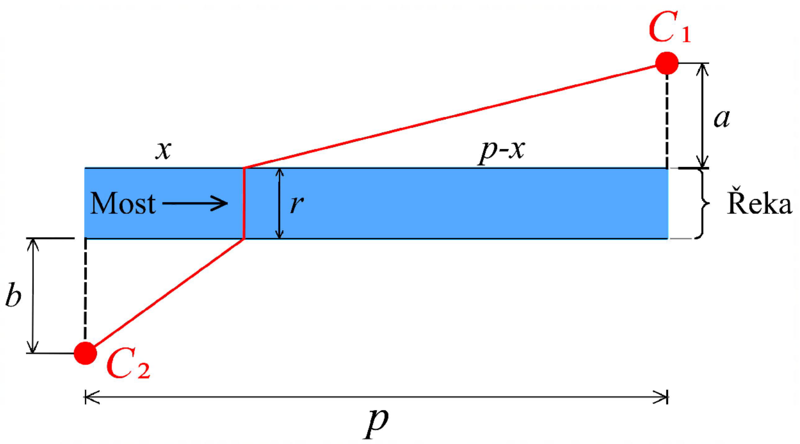
$$x = \sqrt[3]{80} \doteq 4,31\,.$$

Zbývá jen dopočítat y. Dostaneme

$$y \doteq \frac{320}{4,31^2} \doteq 17,23\ [dm]\,.$$

Aby náklady na výrobu dané krabice byly minimální, musí mít krabice rozměry 4,31 dm x 4,31 dm x 17,23 dm.

Příklad 1.2.5. Stavitelé chtějí vybudovat cestu mezi městy C_1 a C_2, která jsou na opačné straně řeky. Řeka má po celé délce šířku r. Kvůli řece musí postavit most. Město C_1 je od řeky ve vzdálenosti a a město C_2 ve vzdálenosti b, $a \le b$. Kam by měli most postavit, aby celková vzdálenost mezi městy byla minimální? Najděte obecné řešení pomocí konstant a, b, p, r (viz Obrázek 1.5).



Obrázek 1.5

Řešení: Naším úkolem bude nalézt vzdálenost x, která určuje pozici mostu. Za pomoci Pythagorovy věty si vyjádříme celkovou vzdálenost d z města C_1 do města C_2. Tato vzdálenost závisí na x, proto

$$d = d(x) = \sqrt{b^2 + x^2} + r + \sqrt{(p-x)^2 + a^2}.$$

Nyní nalezneme derivaci funkce $d(x)$ a následně i její stacionární body.

Platí

$$d'(x) = \frac{x-p}{\sqrt{(p-x)^2 + a^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = 0,$$

a z toho následně dostaneme dva stacionární body

$$x_1 = \frac{bp}{a+b}, \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{bp}{a-b}.$$

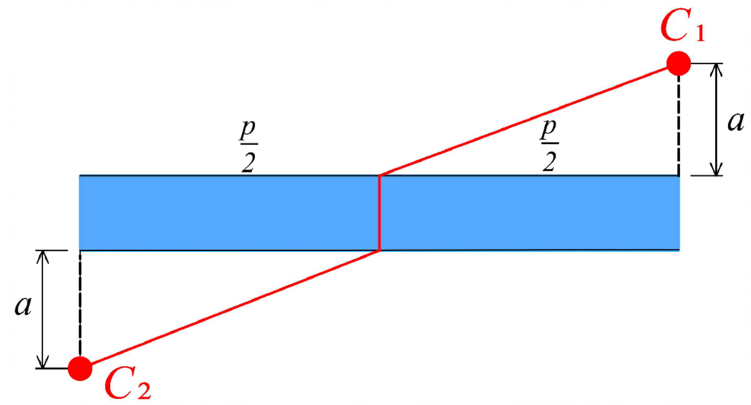
Protože x představuje vzdálenost, musí být kladné. Zároveň platí $a \leq b$, tedy můžeme vyloučit x_2. Nalezneme druhou derivaci funkce $d(x)$ a ověříme, zda je bod x_1 jejím minimem. Pro $x > 0$ platí

$$d''(x) = \frac{a^2\left(x^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}} + b^2\left((p-x)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left((p-x)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Nalezené x_1 je tedy minimem funkce $d(x)$. Pozice mostu je

$$x = \frac{bp}{a+b}.$$

Speciálně, je-li $a = b$, pak $x = \frac{p}{2}$ (viz Obrázek 1.6).



Obrázek 1.6

Příklad 1.2.6. Cena jízdenky na vyhlídkový okruh autobusem je 600 Kč, pokud se jej zúčastní 50 až 100 osob. Za každého dalšího pasažéra (nad 100) se snižuje cena jízdenky o 3 Kč každému z nich. Autobus má celkem 200 míst. Při jakém počtu účastníků bude mít autobusová společnost provozující vyhlídkové okruhy maximální zisk?

Obrázek 1.7

Řešení: Označme si počet účastníků vyhlídkové jízdy jako x. Pak můžeme funkci celkového zisku společnosti f vyjádřit pomocí proměnné x takto:

$$f(x) = \begin{cases} 600x & x \in [50, 100] \\ [600 - 3 \cdot (x - 100)]\,x & x \in (100, 200]. \end{cases}$$

Naším úkolem je nyní najít globální maximum funkce $f(x)$. Je zřejmé, že pro $x \in [50,100]$ nastává maximum v bodě $x = 100$, tedy $f(100) = 60000$. Extrémy funkce $f(x)$ pro $x \in (100,200]$ nalezneme pomocí derivace a stacionárních bodů.
Pro $x \in (100,200]$ dostaneme

$$f'(x) = [(900-3x)x]' = 900-6x = 0\,,$$

z čehož vyplývá, že

$$x = 150\,.$$

Našli jsme jeden stacionární bod funkce $f(x)$. Nyní již zbývá ověřit, že se jedná o maximum. To ověříme pomocí druhé derivace funkce $f(x)$. Platí

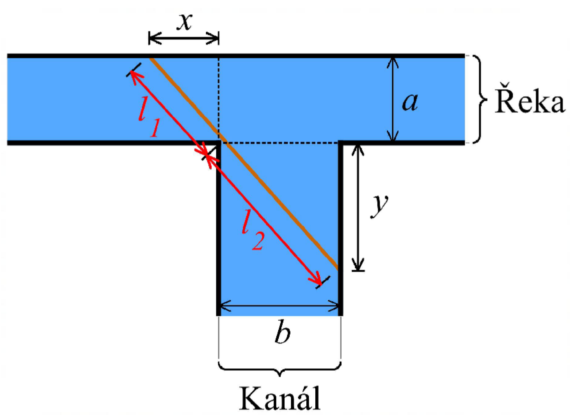
$$f''(x) = -6\,.$$

Druhá derivace je tedy záporná pro všechna x z intervalu $[50,200]$. Z toho plyne, že v bodě $x = 150$ se nachází maximum funkce $f(x)$. Nyní již zbývá spočítat hodnotu funkce $f(x)$ v tomto bodě, a tím získat maximální zisk letecké společnosti. Dostaneme

$$f(150) = 67500\ [\text{Kč}]\,.$$

Maximální zisk 67500 Kč bude mít autobusová společnost právě tehdy, když počet účastníků bude 150.

Příklad 1.2.7. Na obrázku 1.8 je řeka o šířce a. Kolmo k řece je přiveden kanál o šířce b. Jaká je maximální délka klády, kterou lze splavit z řeky do tohoto kanálu?



Obrázek 1.8

Řešení: Označme si délku klády, kterou lze splavit zatáčkou, jako l. Z obrázku (Obrázek 1.8) je patrné, že platí

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{y^2+b^2}\,.$$

Z podobnosti trojúhelníků navíc plyne, že

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{y},$$

odtud

$$y = \frac{ab}{x}.$$

Protože délka klády l závisí na proměnné x, platí

$$l = l(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2} = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{x^2 + b^2}.$$

Největší délka klády nesmí přesáhnout minimum funkce $l(x)$. Nalezneme tedy extrémy funkce $l(x)$ pomocí první derivace. Dostaneme

$$l'(x) = \frac{x^3 - ab^2}{x^2\sqrt{x^2 + b^2}} = 0,$$

z čehož plyne, že

$$x^3 = ab^2$$

a následně

$$x = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Nyní musíme ověřit, že se jedná o minimum. Druhá derivace funkce $l(x)$ by byla na výpočet poměrně nepříjemná. Z toho důvodu využijeme Větu 1.1.7.

Pro každé $x < \sqrt[3]{ab^2}$ platí, že $l'(x) < 0$. Naopak pro každé $x > \sqrt[3]{ab^2}$ platí, že $l'(x) > 0$. Jedná se tedy o minimum funkce $l(x)$. Zbývá dopočítat délku klády. Dostaneme

$$l\left(\sqrt[3]{ab^2}\right) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{\sqrt[3]{ab^2} + b^2} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Délka nejdelší klády, kterou lze splavit z řeky do kanálu, je $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Příklad 1.2.8. Pokud je jistý medikament podán pacientovi v množství $x\ cm^3$, jeho krevní tlak B bude přibližně:

$$B(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}3x^3, \quad 0 \le x \le 0{,}16.$$

Nalezněte maximální hodnotu krevního tlaku a dávku medikamentu, která ji způsobí.

Řešení: Nalezneme první derivaci funkce $B(x)$ a následně její stacionární body na intervalu $x \in [0; 0,16]$. Dostaneme

$$B'(x) = 0{,}1x - 0{,}9x^2 = 0,$$

odtud

$$x(0{,}1 - 0{,}9x) = 0\,.$$

Dostaneme stacionární body

$$x_1 = 0,\; x_2 = \frac{1}{9}\,.$$

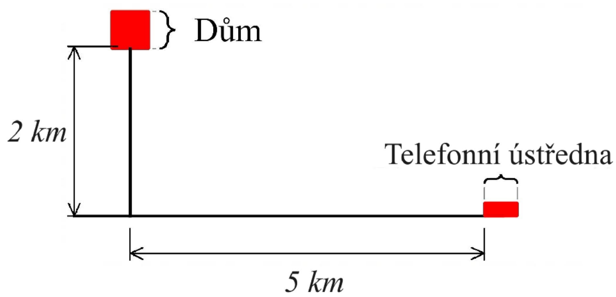
Zjistíme funkční hodnotu funkce $B(x)$ v bodech x_1, x_2 a v krajních bodech intervalu $[0; 0,16]$. Dostaneme

$$B(0) = 0\,, \quad B\left(\frac{1}{9}\right) \doteq 0,0002 \quad \text{a} \quad B\,(0{,}16) \doteq 0{,}00005\,.$$

Maximální hodnota krevního tlaku po požití tohoto medikamentu je 0,0002. Způsobí ho dávka $\frac{1}{9}\,cm^3$.

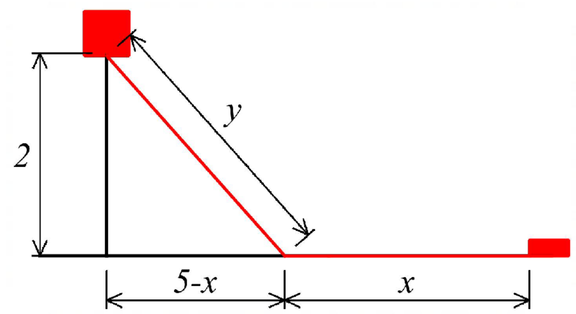
Obrázek 1.9

Příklad 1.2.9. Telefonní společnost dostala zakázku. Má přivést telefonní síť do domu, který leží 2 km od hlavní cesty. Nejbližší telefonní ústředna se nachází na hlavní cestě, 5 km od příjezdové cesty do domu (viz Obrázek 1.10). Náklady na položení drátu podél hlavní cesty jsou 1200 $K\check{c}$ za kilometr. Náklady na položení drátu mimo hlavní cestu jsou 1500 $K\check{c}$ za kilometr. Jak by telefonní společnost měla kabely položit, aby náklady byly minimální?



Obrázek 1.10

Řešení: Označme si délku části drátu, která povede podél hlavní silnice, jako x. Dále si označme druhou část drátu, která povede mimo hlavní silnici, jako y (viz Obrázek 1.11).



Obrázek 1.11

Z obrázku 1.11 je zřejmé, že platí

$$y = \sqrt{4+(5-x)^2}\,.$$

Protože za daných x km zaplatí společnost $x \cdot 1200\,K\check{c}$ a za y km zaplatí $y \cdot 1500\,K\check{c}$, můžeme si celkové náklady f vyjádřit jako

$$f = x\cdot 1200 + y\cdot 1500 = x\cdot 1200 + \sqrt{4+(5-x)^2}\cdot 1500\,.$$

Protože celkové náklady f závisí na proměnné x, platí

$$f = f(x) = x\cdot 1200 + \sqrt{4+(5-x)^2}\cdot 1500.$$

Vytvořili jsme tedy nákladovou funkci $f(x)$. Nyní již stačí nalézt její globální minimum. To nalezneme pomocí první derivace. Platí

$$f'(x) = 1200 + 1500\cdot \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}} = 0\,,$$

odtud

$$\frac{1500x - 7500 + 1200\cdot\sqrt{x^2-10x+29}}{\sqrt{x^2-10x+29}} = 0\,,$$

což platí právě tehdy, když

$$1500x - 7500 + 1200\cdot\sqrt{x^2-10x+29} = 0\,.$$

Vyřešením této rovnice dostaneme

$$x = \frac{7}{3}\,.$$

Pomocí druhé derivace funkce $f(x)$ ověříme, že se jedná o globální minimum. Platí

$$f''(x) = \frac{6000}{(x^2-10x+29)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Po dosazení za x dostaneme
$$f''\left(\frac{7}{3}\right) > 0\,.$$
Jedná se tedy o globální minimum funkce $f(x)$ a náš hledaný bod je opravdu
$$x = \frac{7}{3}\,[km].$$

Příklad 1.2.10. Projektil je vystřelený horizontálně z palné zbraně. Vzdálenost s (v metrech), kterou projektil urazí za t sekund po vystřelení, je dána rovnicí
$$s = 8 - (2-t)^3\,,$$
kde $0 \le t \le 2$. Najděte rychlost střely v čase $t = 1$. Nalezněte také její akceleraci v libovolném čase t.

Obrázek 1.12

Řešení: Vzdálenost s závisí na proměnné t, a proto
$$s = s(t) = 8 - (2-t)^3\,.$$
Platí, že první derivace funkce $s(t)$ je rychlost projektilu v čase t. Dostaneme
$$s'(t) = 12 - 12t + 3t^2.$$
Po dosazení $t = 1$ získáme
$$s'(1) = 3\,\left[\frac{m}{s}\right].$$
Druhou derivací funkce $s(t)$ získáme akceleraci projektilu v libovolném čase t,
kde $0 \le t \le 2$. Dostaneme
$$s''(t) = 6t - 12\,\left[\frac{m}{s^2}\right].$$
Rychlost střely v čase $t = 1$ je tedy $3\ m/s$. Akcelerace projektilu v libovolném čase t, kde $0 \le t \le 2$ je $(6t-12)\ m/s^2$.

Kapitola 2

Integrální počet funkcí jedné proměnné

V této kapitole si nejprve zavedeme neurčitý integrál a poté i určitý integrál. Nakonec si ukážeme některé jejich aplikace.

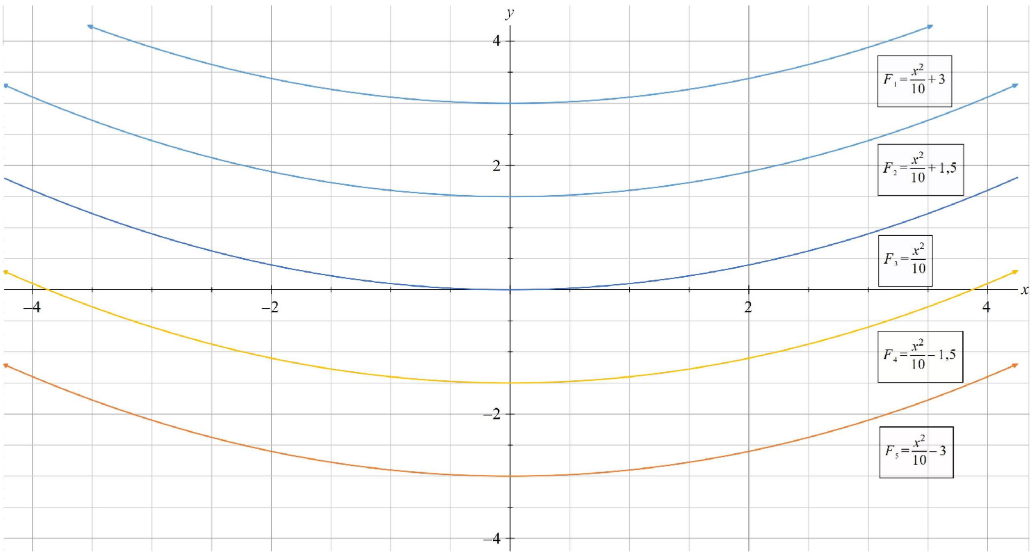
2.1 Zavedení neurčitého integrálu

Definice 2.1.1. Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.*

Funkce $f(x)$ je derivací její primitivní funkce $F(x)$. Vzhledem k tomu, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí $c' = 0,$ je vždy nutné během integrace k funkci $F(x)$ přičíst tzv. *integrační konstantu*. Grafickou interpretaci integrační konstanty lze vidět na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Příklady primitivních funkcí k funkci $f(x) = \frac{x}{5}$

Věta 2.1.1. Nechť F je nějaká primitivní funkce k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak

$$\{F + c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$$

je množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I.

Věta 2.1.2. Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak F je spojitá na I.

Věta 2.1.3. Je-li funkce f spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Definice 2.1.2. Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *neurčitý integrál* funkce f na I a značí se

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Funkce $f(x)$ z předchozí definice se nazývá *integrand*.

Pro výpočet neurčitého integrálu existuje mnoho metod výpočtů. My si zde představíme pouze ty základní. Nejprve si však ukážeme tabulku se vzorci pro integraci elementárních funkcí.

Věta 2.1.4. Pro integraci elementarních funkcí platí:

- $\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = x + c,$
- $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c,$
- $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c,$
- $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1,$
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c,$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c,$

kde $c \in \mathbb{R}$, všude tam, kde jsou definovány.

Nyní si již uvedeme první metodu pro výpočet neurčitého integrálu - *per partes*. Tuto metodu můžeme použít, pokud lze během integrace integrand zapsat ve formě součinu dvou funkcí.

Věta 2.1.5 (*Metoda per partes*)**.** Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I. Pak platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Další metodou, kterou budeme využívat, je tzv. *substituční metoda*.

Věta 2.1.6 (*Substituční metoda I*)**.** Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F, funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c,$$

kde $C \in \mathbb{R}$, $t = \varphi(x)$ a $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}t$.

Poznámka. Uvedené substituční metodě se občas říká *přímá*. Nyní si uvedeme druhý tvar substituční metody, které se někdy říká *nepřímá metoda*.

Věta 2.1.7 (*Substituční metoda II*)**.** Nechť f je funkce definovaná na intervalu I_1, φ je funkce s nenulovou derivací na intervalu I_2 a nechť $\varphi(I_2) = I_1$. Má-li funkce $f(\varphi)\varphi'$ primitivní funkci F na intervalu I_2, je $F(\varphi^{-1})$ primitivní funkce k funkci f na intervalu I_2.

2.2 Zavedení určitého integrálu

V této podkapitole si představíme způsob, jak můžeme zjistit obsah plochy pod křivkou dané funkce. Použijeme k tomu *Riemannův* [1] přístup, který je založen na jednoduché myšlence, a to že dokážeme snadno vypočítat obsah obdélníka. Budeme se tedy snažit aproximovat obsah plochy pod křivkou dané funkce právě pomocí obdélníků.

Definice 2.2.1. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$. *Dělením intervalu* $[a,b]$ rozumíme každou konečnou množinu $D \subseteq [a,b]$ navzájem různých bodů takovou, že $a,b \in D$. Symbolem $\mathscr{D}([a,b])$ označujeme *množinu všech dělení intervalu* $[a,b]$.

Dělení intervalu nám poslouží pro vytvoření jedné ze stran hledaných obdélníků. Nyní zbývá přijít na to, jak by tyto obdélníky měly být vysoké.

Definice 2.2.2. Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a,b]$ a uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}([a,b])$. Označme:

$$m_k = inf\{f(x)\,|\,x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$
$$M_k = sup\{f(x)\,|\,x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

pro $k = 1, \dots, n$. Položme:

$$s(D,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$
$$S(D,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

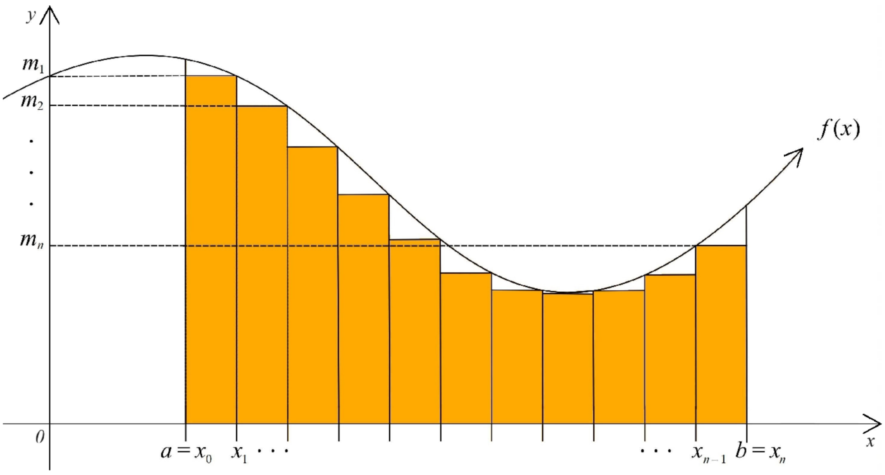
Číslo $s(D,f)$ nazýváme *dolní součet* a číslo $S(D,f)$ nazýváme *horní součet* funkce f při dělení D.

Z obrázků 2.2 a 2.3 je zřejmé, že skutečný obsah plochy pod křivkou funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ bude někde mezi dolním a horním součtem.

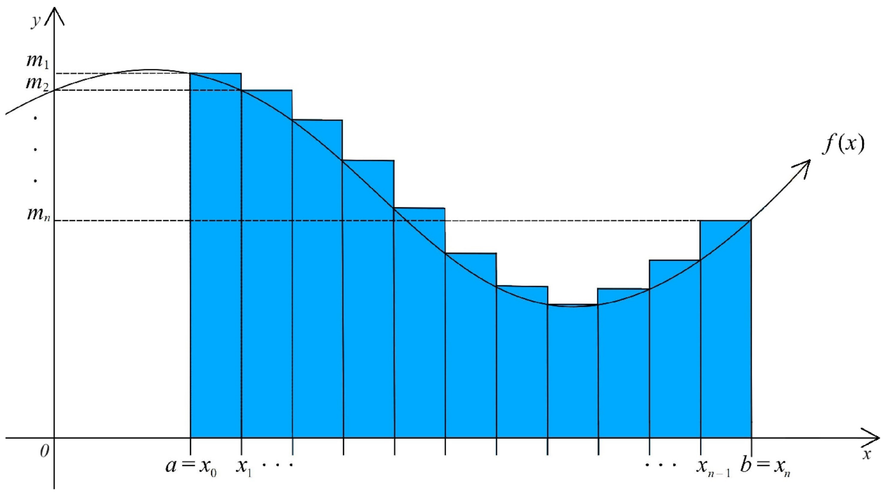
Věta 2.2.1. Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a,b]$ a nechť $c,d \in \mathbb{R}$, $c \le f(x) \le d$ pro každé $x \in [a,b]$. Pak pro libovolná dělení D_1, $D_2 \in \mathscr{D}$([a,b]) platí

$$c(b-a) \le s(D_1,f) \le S(D_2,f) \le d(b-a)\,.$$

[1] Benhard Riemann (1826-1866) byl německý matematik, který výrazně přispěl v oblasti matematické analýzy, teorii čísel a diferenciální geometrie.



Obrázek 2.2: Grafické znázornění dolního součtu



Obrázek 2.3: Grafické znázornění horního součtu

Definice 2.2.3. Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a,b]$. Pak klademe

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = sup\{s(D,f) | D \in \mathscr{D}([a,b])\},$$

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = inf\{s(D,f) | D \in \mathscr{D}([a,b])\}.$$

Číslo $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme *dolním integrálem*, číslo $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ *horním integrálem* funkce f přes interval $[a,b]$.

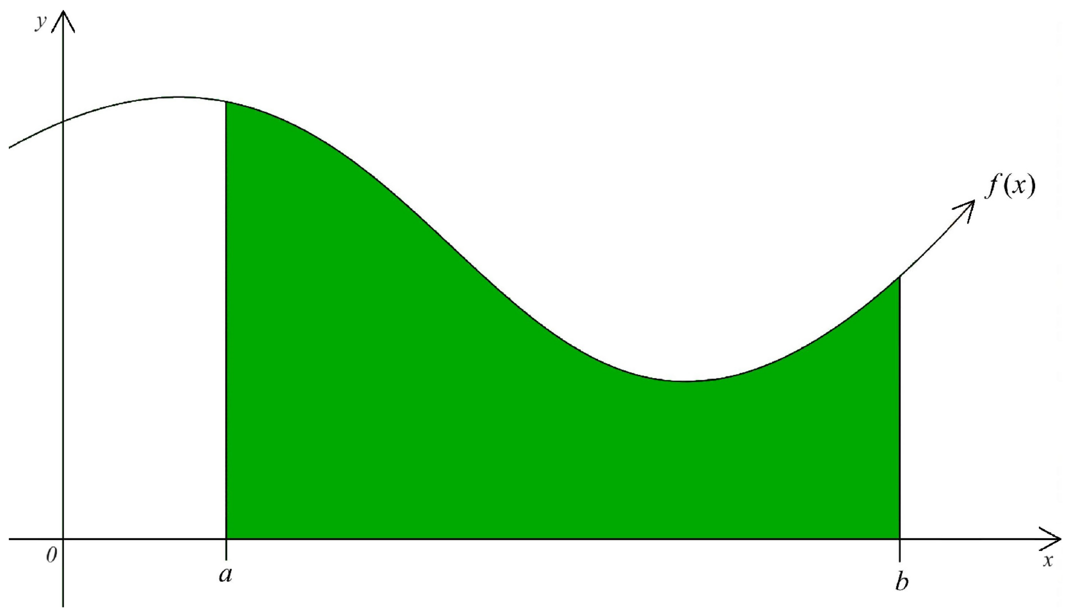
Nyní se již konečně dostáváme k definici samotného *Riemannova integrálu*, který je přirozeně definován pomocí dolního a horního integrálu z předchozí definice.

Definice 2.2.4. Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a,b]$. Jestliže platí rovnost

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

řekneme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $[a,b]$. V tomto případě definujeme její *Riemannův integrál* přes interval $[a,b]$ vztahem

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obrázek 2.4: Grafické znázornění *Riemannova* integrálu funkce $f(x)$ přes interval $[a,b]$ jako obsahu plochy pod křivkou

Zbývá zodpovědět otázku, kdy je vlastně funkce integrovatelná. Na to nám částečnou (ale pro nás dostatečnou) odpověď poskytuje následující věta.

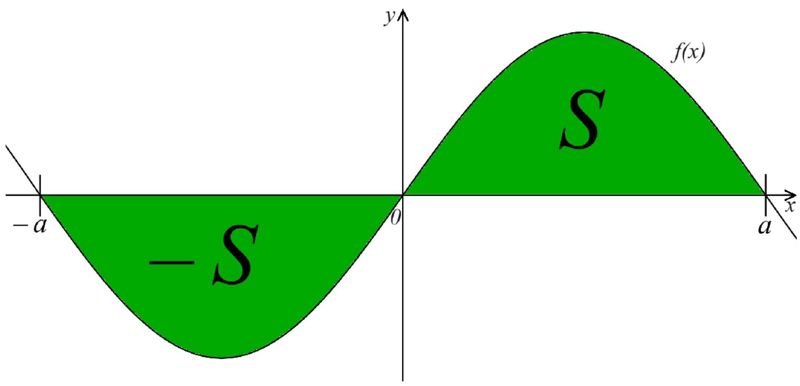
Věta 2.2.2. Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Pak je na tomto intervalu integrovatelná.

Další věta nám udává některé užitečné tipy pro výpočet určitého integrálu, pokud je daná funkce sudá nebo lichá.

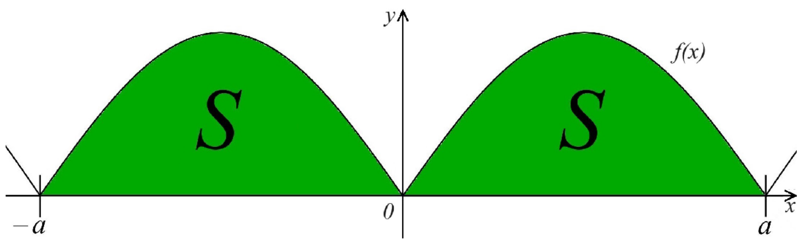
Věta 2.2.3. Nechť $f(x)$ je funkce, která je integrovatelná na intervalu $[-a,a]$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom

- pokud je funkce f sudá, platí
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
- pokud je funkce f lichá, platí
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Proč tato věta platí, lze snadno vidět z následujících obrázků (Obrázek 2.5 a 2.6).



Obrázek 2.5: Grafické znázornění určitého integrálu liché funkce $f(x)$ na intervalu $[-a,a]$



Obrázek 2.6: Grafické znázornění určitého integrálu sudé funkce $f(x)$ na intervalu $[-a,a]$

Nakonec si uvedeme jednu z nejdůležitějších vět matematické analýzy, tzv. *Základní věta integrálního počtu* neboli *Newton-Leibnizova formule*, která spojuje pojem primitivní funkce s určitým integrálem. Tím nám dává mocný nástroj, kterým lze počítat *Riemannovy integrály*.

Věta 2.2.4 (*Newton-Leibnizova*[2] *formule*)**.** Nechť f je integrovatelná na intervalu $[a,b]$ a nechť F je funkce, která je na $[a,b]$ spojitá a na (a,b) primitivní k funkci f. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Protože najít primitivní funkci je vždy jednodušší než se pokoušet najít obsah plochy pod křivkou pomocí dělení intervalu, budeme v tomto textu vždy počítat *Riemannův integrál* právě za pomoci Věty 2.2.4.

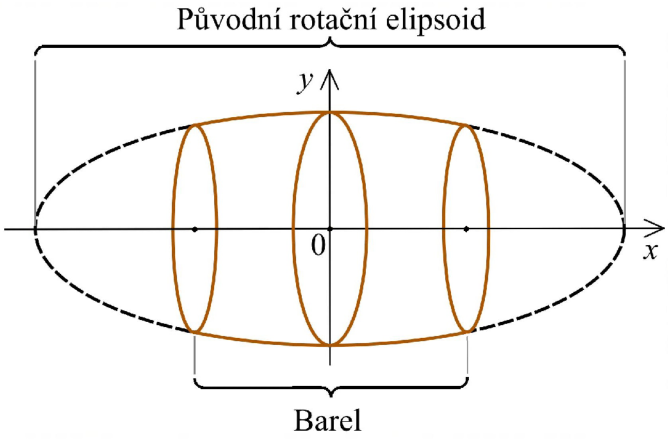
Poznámka. Kvůli častému používání této formule se zavedlo následující označení:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

[2]Sir Isaac Newton (1642-1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) jsou považování za navzájem nezávislé objevitele diferenciálního a integrálního počtu.

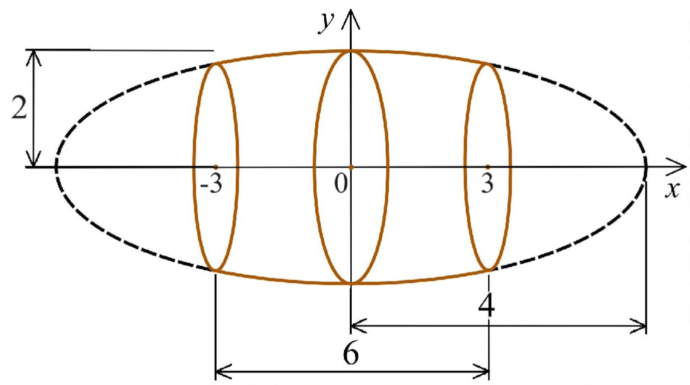
2.3 Aplikace integrálního počtu funkcí jedné proměnné

Příklad 2.3.1. Vinný barel je tvaru rotačního elipsoidu s uříznutými konci. Přesněji řečeno: byl geometricky zformován rotací zkrácené elipsy kolem horizontální osy (viz Obrázek 2.7). Délka hlavní poloosy nezkrácené elipsy byla 4 a délka vedlejší poloosy 2. Vypočtěte objem vinného barelu o výšce 6.



Obrázek 2.7

Řešení: Elipsu umístíme do počátku souřadnicového systému. Horizontální poloosa bude mít tedy délku 4 a vertikální poloosa bude mít délku 2. Protože výška barelu je 6, bude elipsa vytyčovat obrys barelu na intervalu $[-3,3]$ (viz Obrázek 2.8).



Obrázek 2.8

Dále můžeme zapsat středovou rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \Longleftrightarrow |y|=2\sqrt{1-\frac{x^2}{4^2}}.$$

Těleso, které vznikne rotací funkce $y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{4^2}}$ kolem osy x na intervalu $[-3,3]$, je barel, který hledáme. Řezem tohoto tělesa, který je kolmý na osu x, je kružnice o poloměru

$|y| = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4^2}}$. Proto je obsah tohoto řezu v bodě x roven

$$\pi y^2 = 4\pi\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right).$$

Hledaný objem tudíž můžeme najít pomocí určitého integrálu jako

$$V = \int_{-3}^{3} 4\pi\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)dx = \frac{39}{2}\pi\,.$$

Objem vinného sudu je tedy $\frac{39}{2}\pi$.

Příklad 2.3.2. V určitém paměťovém testu byla rychlost zapamatování si slov aproximována rovnicí:

$$M'(t) = 0,2t - 0,003t^2\,,$$

kde $M(t)$ je počet slov zapamatovaných za t minut. Nalezněte funkci $M(t)$, jestliže víte, že $M(0) = 0$. Kolik slov si člověk přibližně zapamatuje za 8 minut?

Řešení: Funkci $M(t)$ nalezneme pomocí integrace $M'(t)$. Dostaneme

$$M(t) = \int M'(t)\,dt = \int 0,2t - 0,003t^2\,dt = 0,1t^2 - 0,001t^3 + c,\; c \in \mathbb{R}\,,$$

a následně nalezneme hodnotu konstanty c:

$$M(0) = 0 = 0,1\cdot 0^2 - 0,00\cdot 0^3 + c \implies c = 0\,.$$

Hledaná funkce $M(t)$ je ve tvaru:

$$M(t) = 0,1t^2 - 0,001t^3\,.$$

Zbývá jen zjistit, kolik slov si člověk přibližně zapamatuje za 8 minut. To zjistíme, spočítáme-li $M(8)$. Dostaneme

$$M(8) = 6,4 - 0,512 = 5,888 \doteq 6\,.$$

Člověk si tedy dokáže zapamatovat přibližně 6 slov za 8 minut.

Příklad 2.3.3. Rychlost průtoku krve v cévě je tím rychlejší, čím je blíže jejímu středu. Rychlost krve je dána rovnicí

$$V = \frac{p}{4Lv}(R^2 - r^2)\,,$$

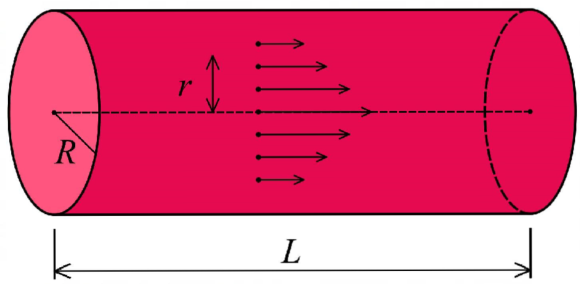
kde R je poloměr cévy, r je vzdálenost krve od středu cévy, p, v a L jsou fyzikální konstanty související s tlakem a viskozitou krve i s délkou cévy. Jestliže R je konstantní, můžeme o V uvažovat jako o funkci

$$V(r) = \frac{p}{4Lv}(R^2 - r^2).$$

Celkový průtok krve Q je dán jako

$$Q = \int_0^R 2\pi \cdot V(r) \cdot r\,dr.$$

Nalezněte hodnotu Q.



Obrázek 2.9

Řešení:

$$Q = 2\pi \frac{p}{4Lv}\int_0^R (R^2 - r^2)\cdot r\,dr = \pi\frac{p}{2Lv}\left(\int_0^R R^2 \cdot r\,dr - \int_0^R r^3\,dr\right) =$$

$$= \frac{\pi p}{2Lv}\left(\left[R^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R\right) = \frac{\pi R^4 p}{8Lv}$$

Celkový průtok krve je

$$Q = \frac{\pi R^4 p}{8Lv}\ [j^3].$$

Příklad 2.3.4. Telefonní společnost zjistila, že délku t telefonního hovoru lze vyjádřit pravděpodobností s hustotou rozdělení

$$f(t) = 2e^{-2t}, \quad 0 \le t < \infty.$$

Určete pravděpodobnost, že náhodný hovor nebude trvat déle než 5 minut.

Obrázek 2.10

Řešení: Pravděpodobnost můžeme vypočítat pomocí určitého integrálu

$$\int_0^5 f(t)\,dt = 2\cdot\int_0^5 e^{-2t}\,dx = 2\cdot\left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^5 = 2\cdot\left[-\frac{e^{-10}}{2}+\frac{1}{2}\right] = 1-\frac{1}{e^{10}} \doteq$$

$$\doteq 0{,}99995 \approx 99{,}995\,\%\,.$$

Pravěpodobnost, že náhodný hovor nebude trvat více než 5 minut je přibližně $99{,}995\,\%$.

Příklad 2.3.5. Perorální lék je po požití absorbován do krevního oběhu rychlostí $5e^{-0{,}04t}$ miligramů za minutu, kde t je počet minut, které uplynuly od podání medikace. Kolik miligramů léku je celkem absorbováno do krevního oběhu 30 minut po jeho podání?

Obrázek 2.11

Řešení: Funkce $f(t) = 5e^{-0{,}04t}$ nám říká, kolik mg léku je v čase t do těla absorbováno. Pokud chceme zjisit, kolik mg léku bylo celkem absorbováno během prvních 30 minut, stačí nám vypočítat určitý integrál funkce $f(t)$ na intervalu $[0,30]$. Dostaneme

$$\int_0^{30} f(t)\,dt = \int_0^{30} 5e^{-0{,}04t}\,dt = 5\cdot\left[-\frac{e^{-0{,}04t}}{0{,}04}\right]_0^{30} = 125-\frac{125}{e^{1{,}2}} \doteq 87\,[mg]\,.$$

Do krevního oběhu je tedy během prvních 30 minut od podání léku absorbováno 87 *mg* medikace.

Příklad 2.3.6. Teplotu T [°C] v čase t hodin lze vyjádřit funkcí

$$T(t) = -0,3t^2 + 4t + 60, \quad 0 \leq t \leq 12\,.$$

Nalezněte průměrnou teplotu na intervalu $[0,10]$.

Řešení: Průměrnou hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, kde $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, lze spočítat pomocí určitého integrálu jako

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Abychom tedy nalezli průměrnou teplotu t na intervalu $[0,10]$, musíme spočítat průměrnou hodnotu funkce $T(t)$ na tomto intervalu. Dostaneme

$$\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} T(t)\,dt = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} -0,3t^2 + 4t + 60\,dt = \frac{1}{10} \cdot \left[-0,1t^3 + 2t^2 + 60t\right]_0^{10} =$$

$$= -10 + 20 + 6 = 70\,[°C]\,.$$

Průměrná teplota na intervalu $[0,10]$ je $70°C$.

Příklad 2.3.7. Firma očekává zisk

$$f = 60e^{0,02t}$$

tisíce dolarů za t měsíců. Předpokládá, že jestliže postaví novou a větší továrnu, zvýší se její zisk na

$$g = 80e^{0,04t}$$

tisíce dolarů za t měsíců. Nalezněte extra zisk během prvních dvou let, který by firma získala, kdyby postavila novou továrnu. Jestliže tato továrna bude stát milión dolarů, vrátí se firmě během prvních dvou let vložená investice zpět?

Obrázek 2.12

Řešení: Zisky f a g závisí na proměnné t, a proto platí

$$f = f(t) = 60e^{0,02t},$$

$$g = g(t) = 80e^{0,04t}.$$

Naším úkolem je zjistit rozdíl zisků $f(t)$ a $g(t)$ na intervalu $[0,24]$. To můžeme udělat pomocí určitého integrálu

$$\int_0^{24} g(t) - f(t)\,dt = \int_0^{24} 80e^{0,04t}\,dt - \int_0^{24} 60e^{0,02t}\,\mathrm{d}t = 80\left[\frac{e^0,04t}{0,04}\right]_0^{24} - 60\left[\frac{e^{0,02t}}{0,02}\right]_0^{24} =$$

$$= 80\cdot\frac{e^{0,96-1}}{0,04} - 60\cdot\frac{e^{0,48-1}}{0,02} \doteq 3223,4 - 1848,2 = 1375,2\,[\text{tisíce dolarů}].$$

Extra zisk během prvních dvou let, který by firma získala postavením nové továrny, je $1,3752$ miliónů dolarů. Během prvních dvou let se firmě investované peníze vrátí.

Příklad 2.3.8. Epidemie chřipky zasáhla vysokoškolskou komunitu. V čase $t = 0$ bylo zaznamenáno pět případů nákazy. Rychlost růstu epidemie (počet nových případů za den) je dána funkcí

$$r(t) = 18e^{0,05t},$$

kde t je počet dnů od propuknutí nákazy. Kolik lidí se nakazilo za prvních 20 dnů?

Řešení: Protože funce $r(t)$ udává rychlost růstu epidemie, její integrací získáme novou funkci $R(t)$, která bude udávat celkový počet lidí, kteří se od začátku epidemie nakazili. Platí

$$R(t) = \int 18e^{0,05t}\,dt = 360e^{0,05t} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Víme, že v čase $t = 0$ bylo nakaženo pět lidí. Musí tedy platit

$$R(0) = 5,$$

neboli

$$360e^{0,05\cdot 0} + c = 5,$$

z čehož plyne, že $c = -355$. Nyní víme, že hledaná funkce je tvaru

$$R(t) = 360e^{0,05t} - 355.$$

Stačí již pouze dopočítat hodnotu $R(20)$. Platí

$$R(20) = 360e - 355 = 624.$$

Za prvních 20 dní se nakazilo 624 lidí.

Příklad 2.3.9. 86 % řidičů v USA používá v automobilu bezpečnostní pásy, zatímco zbylých 14 % řidičů stále riskuje vážné zranění. Funkce

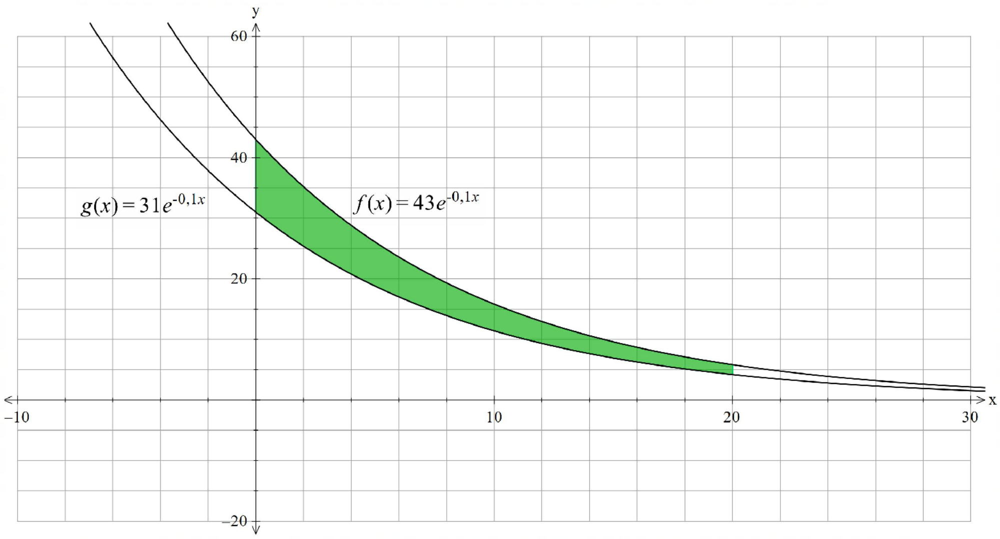
$$f(x) = 43e^{-0,1x}$$

představuje odhad počtu úmrtí (v tisících) za rok v případě, že nebyly použity bezpečnostní pásy a funkce

$$g(x) = 31e^{-0,1x}$$

je předpověď počtu úmrtí (v tisících) za rok v případě, že bezpečnostní pásy použity byly. Proměnná x reprezentuje počet let od roku 2010. Kolik lidí bude podle odhadů během let 2010 až 2030 zachráněno bezpečnostními pásy?

Řešení: Ze zadání vyplývá, že plocha mezi křivkami funkcí $f(x)$ a $g(x)$ představuje počet lidí zachráněných bezpečnostními pásy (viz Obrázek 2.13).



Obrázek 2.13: Plocha mezi křivkami funkcí $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu $[0,20]$

Z toho plyne, že stačí spočítat integrál

$$\int_0^{20} f(x) - g(x)\,dx = \int_0^{20} 43e^{-0,1x} - 31e^{-0,1x}\,dx = 12 \cdot \int_0^{20} e^{-0,1x}\,dx =$$

$$= 12 \cdot \left[-\frac{e^{-0,1x}}{0,1} \right]_0^{20} = 120 - \frac{120}{e^2} \doteq 103,76\,[\text{tisíc lidí}].$$

Podle odhadů bude mezi lety 2010 až 2030 zachráněno díky bezpečnostním pásům zhruba 103 760 lidí.

Příklad 2.3.10. Mladá žena ve Spojených státech amerických přibírá na váze průměrnou rychlostí

$$f = 6,5(x-10)^{-\frac{1}{2}}$$

kilogramů za rok a mladý muž ve Spojených státech amerických přibírá na váze průměrnou rychlostí

$$g = 8,5(x-10)^{-\frac{1}{2}},$$

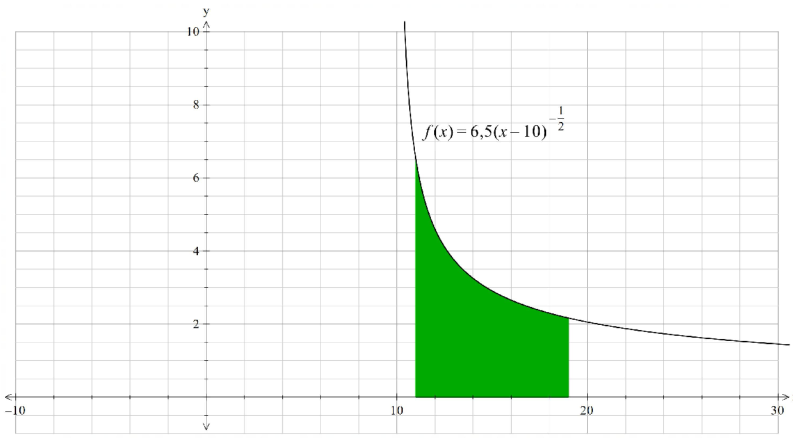
kde x je jejich věk v letech $(11 \leq x \leq 20)$. Kolik kilogramů průměrně přibere mladá žena a mladý muž v USA ve věku od 11 do 19 let?

Řešení: Protože průměrná rychlost nárůstu váhy je závislá na hodnotě x, platí

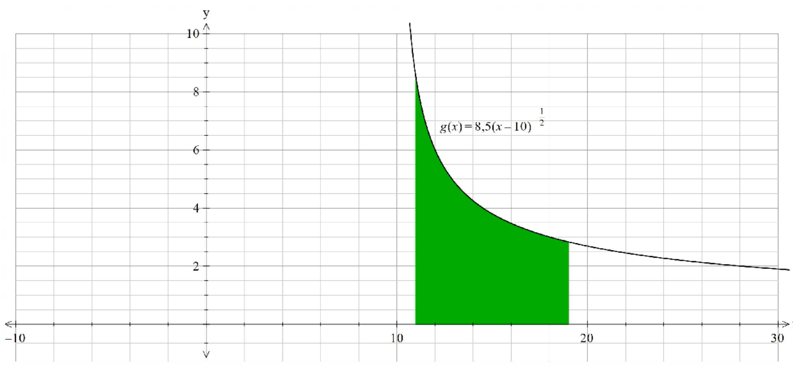
$$f = f(x) = 6,5(x-10)^{-\frac{1}{2}},$$

$$g = g(x) = 8,5(x-10)^{-\frac{1}{2}},$$

kde $11 \leq x \leq 19$. Funkce $f(x)$ a $g(x)$ popisují průměrnou rychlost přibírání na váze, a proto hodnota určitého integrálu této funkce na intervalu $[a,b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 11$, $b \leq 20$ představuje celkový přírůstek hmotnosti na tomto intervalu (viz Obrázek 2.14 a 2.15).



Obrázek 2.14: Obsah plochy pod křivkou funkce $f(x)$ na intervalu $[11,19]$



Obrázek 2.15: Obsah plochy pod křivkou funkce $g(x)$ na intervalu $[11,19]$

Protože funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou svými násobky, bude pro nás výhodné nejprve spočítat

$$\int_{11}^{19} c \cdot (x-10)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, a následně za tuto konstantu pouze dosadit požadované hodnoty. Tento integrál vyřešíme metodou substituce:

$$\begin{aligned} u^2 &= x - 10 \\ 2udu &= dx\,. \end{aligned}$$

Po přepočítání dolní a horní meze dostaneme

$$c\int_1^3 \frac{1}{u}\cdot 2u\,du = c\int_1^3 2\,du = c\,[2u]_1^3 = 4\cdot c\,[\text{kilogramů}]\,.$$

Pro $c = 6,5$ dostaneme 26 kilogramů. Pro $c = 8,5$ dostaneme 34 kilogramů.

Mladá žena v USA přibere mezi 11. a 19. rokem života průměrně 26 kilogramů a mladý muž v USA přibere mezi 11. a 19. rokem života průměrně 34 kilogramů.

Kapitola 3

Číselné řady

V této kapitole se zaměříme na zavedení pojmu nekonečné řady a následně na její praktické aplikace. Abychom nekonečné řady mohli zavést, potřebujeme nejprve znát pojem *posloupnost.*

3.1 Posloupnosti

Definice 3.1.1. *Posloupnost* je funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{N}$. Posloupnost označujeme $\{a_n\}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, n-tý prvek označujeme nejčastěji a_n.

Posloupnost je tedy funkce, která má za svůj definiční obor podmnožinu přirozených čísel. Oborem hodnot pak může být libovolná množina.

Nyní si představíme dva druhy posloupností, se kterými se můžeme běžně setkat na střední škole. Jedná se o posloupnost *aritmetickou* a *geometrickou*.

Definice 3.1.2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *aritmetická* posloupnost právě tehdy, když existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d\,. \tag{1}$$

Číslo d se potom nazývá *diference* této posloupnosti.

Aritmetická posloupnost je tedy taková posloupnost, ve které mají libovolné dva po sobě jdoucí členy mezi sebou stálý rozdíl. Uvedený rekurentní vzorec (1) může být pro velká n dosti zdlouhavý. Proto v následující větě zavedeme vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti.

Věta 3.1.1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí d. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d\,.$$

Definice 3.1.3. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická* posloupnost právě tehdy, když existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q\,. \tag{2}$$

Číslo q se potom nazývá *kvocient* této posloupnosti.

Geometrická posloupnost je tedy taková posloupnost, ve které mají libovolné dva po sobě jdoucí členy mezi sebou stálý poměr. Protože rekurentní vzorec (2) by byl pro velká n velmi zdlouhavý, zavedeme v následující větě vzorec pro n-tý člen geometrické posloupnosti.

Věta 3.1.2. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem q. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1\,.$$

Definice 3.1.4. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu L*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Limita posloupnosti tedy představuje číslo, ke kterému se daná posloupnost pro zvětšující se n neustále přibližuje.

Definice 3.1.5. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže ke každému $m \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n > m$.

Poznámka. V tomto případě se daná posloupnost nazývá *divergentní*. V opačném případě (limita posloupnosti je reálné číslo, nikoliv ∞) se posloupnost nazývá *konvergentní*.

3.2 Nekonečné číselné řady

Definice 3.2.1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \cdots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \cdots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*.

Poznámka. V případě, kdy řada diverguje, rozlišujeme tři případy:

- Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k ∞;
- Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k $-\infty$;
- Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, říkáme, že řada osciluje.

Nekonečná číselná řada je tedy součet všech členů nekonečné posloupnosti.

Definice 3.2.2. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem $q \in \mathbb{R}$. Pak se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývá *nekonečná geometrická řada* s kvocientem q.

Nyní si odvodíme vzorec pro její součet. Mějme nekonečnou geometrickou řadu

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad \text{kde } a \neq 0, q \neq 0,$$

s kvocientem $q \in \mathbb{R}$. Nyní musíme rozlišit tři případy.

1. Nechť $q = 1$. Pak $s_n = na$ a platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \pm\infty$. Řada v tomto případě diverguje.
2. Nechť $q = -1$. Pak má řada tvar $a + (-a) + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$. Z toho vyplývá, že částečný součet řady je

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro sudé n,} \\ a & \text{pro liché n.} \end{cases}$$

Z toho důvodu ovšem $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, z čehož plyne, že naše původní řada osciluje.

3. Nechť $|q| \neq 1$. Potom
$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1},$$
z čehož plyne, že
$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n.$$
Nyní odečteme druhou rovnici od první a získáme
$$s_n - qs_n = a - aq^n,$$
z čehož dostaneme
$$s_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$
Nyní uvažujme tři případy
   - pro $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, proto je $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$;
   - pro $q > 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, proto je $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$;
   - pro $q < -1$ platí, že $\lim_{n\to\infty} q^n$ neexistuje, a proto ani $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Tímto postupem jsme odvodili a dokázali následující větu.

Věta 3.2.1. Nechť
$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$
je nekonečná geometrická řada s kvocientem $q \in \mathbb{R}$. Potom platí:

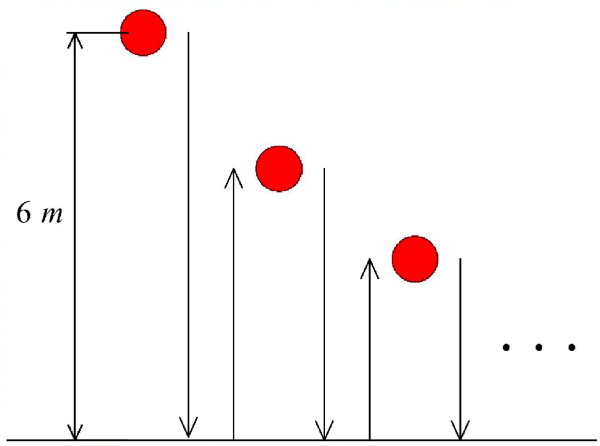
- pro $|q| \geq 1$ je řada divergentní;
- pro $|q| < 1$ je řada konvergentní a její součet je
$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Věta 3.2.2. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = u$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = v$, kde $u, v \in \mathbb{R}$. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a zároveň platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = u + v$.

Věta 3.2.3. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Naopak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$, kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.3 Aplikace číselných řad

Příklad 3.3.1. Míč se nachází ve výšce 6 m. Pokud jej pustíme, dostane se při každém odrazu do výšky, která činí dvě třetiny výšky, ze které padal (viz Obrázek 3.1). Kolik měří celková dráha, kterou míč od upuštění do zastavení urazil?



Obrázek 3.1

Řešení: Při upuštění míče nejprve míč urazí 6 m. Po jeho odražení zpět nahoru urazí míč $6 \cdot \frac{2}{3}$ m. Stejnou dráhu míč urazí, když bude opět padat dolů. Odtud' se míč znovu odrazí nahoru a urazí $6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ m. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat do nekonečna. Při sečtení všech těchto drah získáme

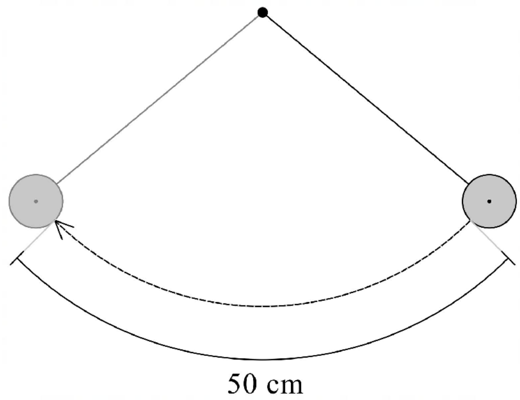
$$6 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots = 6 + 12 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{2}{3}$. Můžeme tedy řadu sečíst. Dostaneme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = 6 + 12 \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{-\frac{1}{3}} \right) = 6 + 12 \cdot 2 = 30\,[m] .$$

Celková dráha, kterou míč od upuštění do zastavení urazí, je 30 m.

Příklad 3.3.2. Délka prvního kyvu kyvadla je 50 cm. Každý následující kyv dosahuje tři čtvrtě délky toho předchozího. Pokud opomeneme všechny ostatní síly, které by na kyvadlo mohly působit, jaká by byla výsledná celková dráha, kterou by kyvadlo za čas svého pohybu urazilo?



Obrázek 3.2

Řešení: Délka prvního kyvu je 50 cm. Délka druhého tedy bude $\frac{3}{4} \cdot 50$ cm. Následující kyv bude mít délku $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 50$ cm. Stejným způsobem bychom mohli pokračovat dále. Pokud všechny tyto délky sečteme, dostaneme

$$50 + \frac{3}{4} \cdot 50 + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 50 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 50 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{3}{4}$. Řadu tedy můžeme sečíst. Dostaneme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 50 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = 50 \cdot 4 = 200\,[cm].$$

Celková výsledná dráha, kterou by kyvadlo za čas svého pohybu urazilo, by byla 200 cm.

Příklad 3.3.3. Montgolfiéra, neboli horkovzdušný balón, se během své první minuty letu vznese do výšky 25 m. Každou další minutu balón stoupne o 80 % předchozího zvýšení. Jaká je maximální výška, které balón dosáhne?

Obrázek 3.3

Řešení: Během první minuty se balón vznese do výšky 25 m. Během druhé minuty balón vystoupá o $0,8 \cdot 25$ m, následující minutu o $(0,8)^2 \cdot 25$ m. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat do nekonečna. Pokud všechny tyto dráhy sečteme, dostaneme nekonečnou číselnou řadu

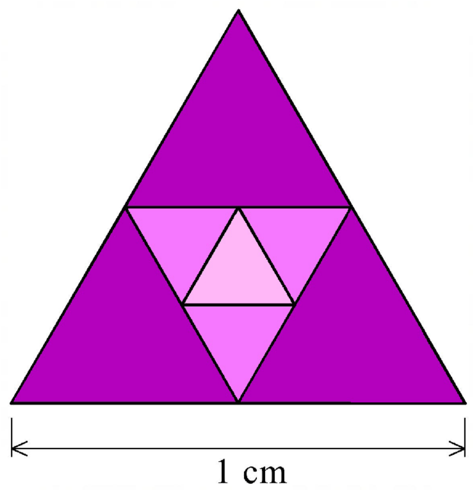
$$25 + 0,8 \cdot 25 + (0,8)^2 \cdot 25 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 25 \cdot (0,8)^{n-1}.$$

Protože se jedná o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = 0,8$, můžeme tuto řadu sečíst. Dostaneme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 25 \cdot \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} = 125\,[m].$$

Maximální výška, které balón dosáhne, je 125 metrů.

Příklad 3.3.4. Na obrázku (Obrázek 3.4) je vyobrazen útvar, který je složen z několika rovnostranných trojúhelníků. Strana největšího trojúhelníka na obrázku je 1 cm. Vrcholy menšího trojúhelníka, který je vepsán do původního, leží ve středech jeho stran. Vrcholy nejmenšího trojúhelníka jsou ve středech stran prostředního. Pokud bychom tento proces opakovali do nekonečna, jaký by byl součet obvodů všech vzniklých trojúhelníků?



Obrázek 3.4

Řešení: Protože se jedná o rovnostranný trojúhelník, budou všechny vzniklé trojúhelníky také rovnostranné. Navíc jsou strany všech vnitřních trojúhelníků tvořeny středními příčkami předchozího většího trojúhelníka. Bude tedy vždy platit, že délka strany trojúhelníka bude poloviční oproti předchozímu většímu trojúhelníku. Obvod největšího trojúhelníka bude $3 \cdot 1$ cm. Obvod trojúhelníka, který je do něj vepsán, bude $3 \cdot \frac{1}{2}$ cm. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat do nekonečna. Pokud všechny tyto obvody sečteme, dostaneme nekonečnou řadu

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots = \sum_{n}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

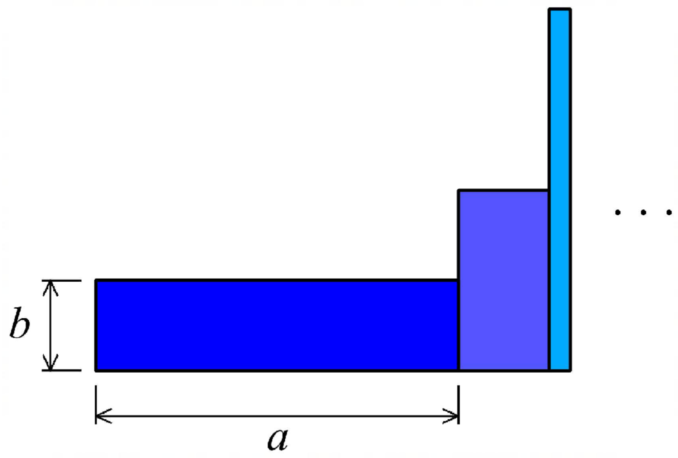
Jedná se tedy o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Tuto řadu můžeme sečíst. Dostaneme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 6\,[cm]\,.$$

Pokud bychom daný proces opakovali do nekonečna, součet obvodů všech vzniklých trojúhelníků by byl 6 cm.

Příklad 3.3.5. Představme si obrazec, který je tvořen z nekonečně mnoha obdélníků. Délky jejich vodorovných stran se postupně zmenšují v poměru 4:1. Naopak délky jejich svislých stran se postupně zvětšují v poměru 1:2. Obsah původního obdélníka je 48 cm^2. Jaký bude obsah výsledného obrazce?

Řešení: Označme si délku vodorovné strany původního obdélníka a a délku jeho svislé strany b.



Obrázek 3.5

Ze zadání víme, že platí

$$a \cdot b = 48\,[cm^2]\,.$$

Pro následující obdélník obdržíme rozměry $\frac{a}{4}$ a $2b$. Pro další obdélník získáme rozměry $\frac{a}{16}$ a $4 \cdot b$. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat do nekonečna. Pokud bychom chtěli sečíst obsahy všech takto vzniklých obdélníků, dostali bychom

$$a \cdot b + \frac{a}{4} \cdot 2b + \frac{a}{16} \cdot 4b \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{4^{n-1}} \cdot 2^{n-1} b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot b}{2^{n-1}}\,.$$

Protože ze zadání víme, že $a \cdot b = 48\,[cm^2]$, můžeme dosadit a dostaneme

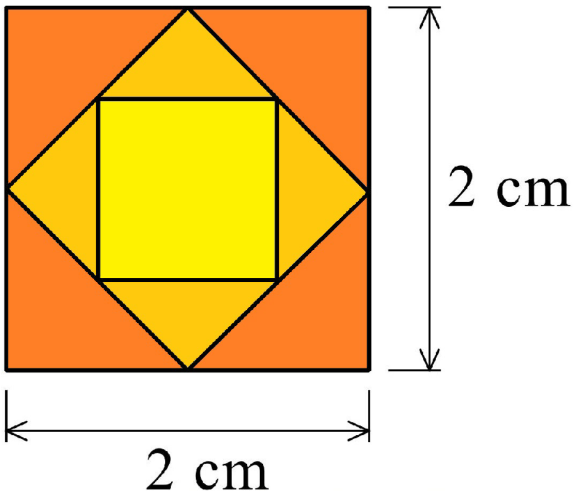
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot b}{2^{n-1}} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{48}{2^{n-1}} = 48 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Jedná se tedy o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, a proto ji můžeme sečíst. Dostaneme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 48 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 96\,[cm^2].$$

Obsah výsledného obrazce bude 96 cm^2.

Příklad 3.3.6. Mějme čtverec o straně délky 2 cm. Do tohoto čtverce vepíšeme menší čtverec tak, že jeho strany jsou tvořeny spojnicemi středů stran původního čtverce. Tímto způsobem budeme pokračovat (viz Obrázek 3.6). Vypočtěte součet obvodů a součet obsahů všech takto vzniklých čtverců, pokud jich bude nekonečně mnoho.



Obrázek 3.6

Řešení: Označme stranu původního čtverce jako a. Spočítejme nejdříve součet obvodů o všech těchto čtverců. Pro první (největší) čtverec získáme obvod lehce: $o_1 = 4 \cdot a = 8$ cm. Pro druhý čtverec nejdříve musíme spočítat délku jeho strany. Tu označme jako b. Snadno ji získáme z Pythagorovy věty. Dostaneme

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2,$$

z čehož po dosazení plyne, že

$$b = \sqrt{2}.$$

Obvod druhého čtverce tedy bude $o_2 = 4 \cdot b = 4 \cdot \sqrt{2}\ [cm]$. Pro obvod dalšího čtverce získáme obdobným způsobem $o_3 = 4\ [cm]$. Pokud tento proces budeme opakovat donekonečna a výsledné obvody sečteme, získáme nekonečnou řadu

$$o = o_1 + o_2 + o_3 + \cdots = 4 \cdot 2 + 4 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-3}.$$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, proto ji můžeme sečíst. Dostaneme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 8 \cdot \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 \cdot \left(2+\sqrt{2}\right)\ [cm].$$

Součet obvodů všech takto vzniklých čtverců je $8 \cdot \left(2+\sqrt{2}\right)$ cm.

Nyní již zbývá dopočítat součet všech obsahů S takto vzniklých čtverců. Pro první čtverec dostaneme obsah $S_1 = a^2 = 4\ cm^2$. Pro druhý čtverec získáme obsah $S_2 = b^2 = 2\ cm^2$. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat do nekonečna. Po sečtení všech obsahů dostaneme

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = 4 + 2 + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-3}}.$$

Jde o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{2}$ a můžeme ji tedy sečíst. Dostaneme

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8\ [cm^2].$$

Součet obsahů všech takto vzniklých čtverců je $8\ cm^2$.

Příklad 3.3.7. 26. dubna 1986 došlo v Černobylské jaderné elektrárně k závažné havárii nejvyššího stupně. Nyní je přilehlá oblast kvůli vysoké radiaci neobyvatelná. Jedním z hlavních radioaktivních prvků, nacházejících se v jaderné elektrárně, je cesium-137. Tento radioizotop má poločas rozpadu 30 let. Pozorováním bylo zjištěno, že hmotnostní úbytek radioaktivní látky za určitý čas je úměrný hmotnosti, která byla dána na začátku. Najděte vzorec pro jeho hmotnost jako funkci času.

Obrázek 3.7

Řešení: Označme $m(t)$ hmotnost cesia po t letech. Potom pro úbytek hmotnosti platí:

$$m(t+1) - m(t) = -k \cdot m(t),$$

kde k je kladná konstanta a $t \in \mathbb{N}_0$. Odtud po úpravě dostaneme

$$m(t+1) = m(t) \cdot (1-k)\,.$$

Pro $t = 0, 1, 2 \ldots n-1$ dostaneme

$$m(1) = m(0) \cdot (1-k),$$

$$\begin{aligned} m(2) &= m(1) \cdot (1-k), \\ m(3) &= m(2) \cdot (1-k), \\ &\vdots \\ m(n) &= m(n-1) \cdot (1-k). \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} m(1) &= m(0) \cdot (1-k)^1, \\ m(2) &= m(0) \cdot (1-k)^2, \\ m(3) &= m(0) \cdot (1-k)^3, \\ &\vdots \\ m(n) &= m(0) \cdot (1-k)^n. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že pro libovolné $t \in \mathbb{N}_0$ platí

$$m(t) = m(0) \cdot (1-k)^t. \tag{1}$$

Ze zadání víme, že platí

$$m(30) = m(0) \cdot (1-k)^{30} = \frac{1}{2} m(0),$$

odtud

$$1-k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$m(t) = m(0) \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}\right)^t = m(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}},$$

což je vyjadření, které jsme hledali.

Občas se během výuky stane, že některý ze žáků má problém pochopit tvrzení, že $0,\overline{99} =$ $= 1$. Z tohoto důvodu vyřešíme následující příklad.

Příklad 3.3.8. Dokažte, že $0,\overline{99} = 1$.

Řešení: Je zřejmé, že platí

$$0,\overline{99} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots,$$

což můžeme upravit následujícím způsobem:

$$0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} \cdots = \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{10}$, proto ji můžeme sečíst. Dostaneme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1.$$

Tím je dané tvrzení dokázáno. ■

Příklad 3.3.9. Pan Novák si na začátku každého úrokovacího období ukládá na svůj účet částku a Kč při úrokové sazbě i, $i > 0$. Kolik Kč si pan Novák uspoří na konci n-tého úrokovacího období? Kolik Kč si pan Novák uspoří za 10 let, pokud si na začátku každého roku ukládá na svůj účet 30 000 Kč při roční úrokové sazbě 3 %?

Řešení: Pan Novák si na začátku prvního úrokovacího období uloží na svůj účet a Kč. Na konci prvního úrokovacího období bude mít částku $a \cdot (1+i)$. Na začátku druhého úrokovacího období si na svůj účet opět vloží částku a Kč. Protože první uložená částka se panu Novákovi úročí i během druhého období, bude mít na konci druhého úrokovacího období na účtu celkem $a \cdot (1+i)^2 + a \cdot (1+i)$ Kč. Touto úvahou dále dostaneme následující tabulku.

Pořadí uložené částky	Počet úrokovacích období, po které se bude daná částka úročit	Celková hodnota dané částky na konci posledního úrokovacího období
1	n	$a \cdot (1+i)^n$
2	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n\ \ 1}$
3	$n-2$	$a \cdot (1+i)^{n-2}$
⋮	⋮	⋮
n	1	$a \cdot (1+i)^1$

Tabulka 3.1

Pokud sečteme hodnoty všech uložených částek na konci posledního úrokovacího období, dostaneme

$$a \cdot (1+i)^n + a \cdot (1+i)^{n-1} + \cdots + a \cdot (1+i) = \sum_{k=1}^{n} a \cdot (1+i)^k .$$

Jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $q = (1+i)$. Zbývá vypočítat její součet s_n. Dostaneme

$$s_n = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \, [Kč].$$

Pan Novák si na konci n-tého úrokovacího období naspoří $a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ Kč.

Pokud si pan Novák každý rok ukládá na svůj účet 30 000 Kč po dobu 10 let při roční úrokové sazbě 3 %, naspoří si celkem

$$a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 30000(1+0,03) \cdot \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{0,03} \doteq 354\,233,87 \, [Kč] .$$

Příklad 3.3.10. Banka nabízí spoření s roční úrokovou sazbou 5 %, která se po deseti letech sníží pouze na 3 %. Úrok se připisuje na účet ke konci každého roku. Pan Veselý si na začátku prvního roku uložil na svůj spořící účet částku 500 000 *Kč*. Jaká je nejvyšší možná částka, kterou si pan Veselý může na začátku každého dalšího roku z účtu vybrat tak, aby měl jistotu, že mu peníze nikdy nedojdou?

Řešení: Označme

$$\begin{aligned} PV &= 500\,000 \, [Kč] , \\ i_1 &= 5\,\% = 0,05 , \\ i_2 &= 3\,\% = 0,03 , \\ x &= \text{maximální výše výběru} . \end{aligned}$$

Pan Veselý si na začátku druhého roku vybere z účtu částku $x \, [Kč]$. Protože se ale daná částka během prvního roku zúročila úrokem i_1, byla její hodnota na začátku prvního roku pouze

$$\frac{x}{1+i_1} \, [Kč].$$

Na začátku třetího roku si pan Veselý z účtu vybere opět tu samou částku $x \, [Kč]$. Tato částka se ale během předchozích dvou let úročila úrokem i_1. Její hodnota byla na začátku prvního roku pouze

$$\frac{x}{(1+i_1)^2} \, [Kč].$$

Označení PV (*present value*) se ve finanční matematice obvykle používá pro současnou/původní hodnotu kapitálu.

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat pro prvních 10 let, během nichž se dané částky budou úročit. Po sečtení všech těchto částek dostaneme

$$\frac{x}{1+i_1}+\frac{x}{(1+i_1)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+i_1)^{10}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{x}{(1+i_1)^n}\,. \tag{1}$$

Získali jsme geometrickou řadu s kvocientem $q_1=\frac{1}{1+i_1}=\frac{1}{1,05}$. Poslední částku z předchozí řady vybere pan Veselý na začátku jedenáctého roku. Tento rok se změní úroková sazba z i_1 na i_2. Na začátku dvanáctého roku si pan Veselý vybere z účtu opět částku $x\,[K\check{c}]$. Tato částka se ovšem během prvních 10 let úročila úrokem i_1. Během jedenáctého roku se úročila úrokem i_2. Na začátku prvního roku byla její hodnota tedy

$$\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)}\,.$$

Na začátku třináctého roku si pan Veselý vybral znovu částku $x\,[K\check{c}]$. Během předchozích dvanácti let se ovšem tato částka úročila, a proto byla její hodnota na začátku spoření pouze

$$\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)^2}\,.$$

Protože se úrok již dále nezmění, mohli bychom tímto způsobem pokračovat donekonečna. Po sečtení všech částek od začátku jedenáctého roku dostaneme

$$\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)}+\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)^n}\,. \tag{2}$$

Získali jsme nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q_2=\frac{1}{1+i_2}=\frac{1}{1,03}$.
Platí $|q_2|<1$, proto můžeme tuto řadu sečíst.

Sečtením řad (1) a (2) musíme dostat původní částku, která byla na začátku vložena na účet. Proto

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{x}{(1+i_1)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)^n}=PV\,. \tag{3}$$

Součet řady (1) si označme u. Součet řady (2) si označme v. Po úpravě dostaneme

$$u=\frac{x}{1+i_1}\cdot\frac{1-q_1^{10}}{1-q_1}=\frac{x}{1,05}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1,05}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1,05}}\doteq 7,7217\cdot x\,,$$

$$v=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)}\cdot\frac{1-q_2^n}{1-q_2}\right)=\frac{x}{(1+i_1)^{10}\cdot(1+i_2)}\cdot\frac{1}{1-q_2}=$$

$$=\frac{x}{1,05^{10}\cdot 1,03}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1,03}}\doteq 20,4638\cdot x\,.$$

Dosazením do (3) dostaneme

$$7,7217 \cdot x + 20,4638 \cdot x = 500\,000$$

odtud

$$x \doteq 17\,739,62\,[Kč]\,.$$

Nejvyšší možná částka, kterou si pan Veselý může vybrat na začátku každého dalšího roku z účtu tak, aby měl jistotu, že mu peníze nikdy nedojdou, je $17\,739,62\,Kč$.

Závěr

Cílem mojí bakalářské práce bylo ukázat aplikace matematické analýzy v praktickém životě. Jednotlivé úlohy jsou vhodné pro středoškolské studenty, popřípadě studenty prvního ročníku vysoké školy. Text může být využit jako sbírka příkladů pro předmět MUC 27 Seminář z aplikací matematické analýzy i středoškolskými učiteli pro rozšíření učiva a demonstraci jeho konkrétního využití.

Během práce jsem si rozšířil znalosti o využití matematiky v reálném životě a o práci s odbornými anglickými matematickými texty. Dále jsem se naučil lépe pracovat se systémem LaTeX, se kterým jsem předtím neměl žádné zkušenosti.

Příloha 1: Seznam převzatých obrázků a jejich zdrojů

- Obrázek 1.1 - 2001 Total Solar Eclipse Global Map, 2004. In: NASA Eclipse Web Site [online]. [cit. 2024-03-12]. Dostupné z: https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEmono/TSE2001/TSE2001.html
- Obrázek 1.7 - City Sightseeing Roma, c2024. In: Průvodce městem Řím [online]. [cit. 2024-03-23]. Dostupné z: https://www.cestadorima.com/vyhlidkove-autobusy-v-rime/vyhlidkovy-autobus-city-sightseeing-roma/
- Obrázek 1.9 - Aplikace léků do podkoží, 2021. In: MojeMedicina.cz [online]. [cit. 2024-03-23]. Dostupné z: https://www.mojemedicina.cz/pruvodce-pacienta/diagnozy/Hemofilie/aplikace-leku-do-podkozi.html
- Obrázek 1.12 - What would happen if you shot a gun in space?, c2024. In: BBC Science Focus [online]. [cit. 2024-04-02]. Dostupné z: https://www.sciencefocus.com/space/what-would-happen-if-you-shot-a-gun-in-space
- Obrázek 2.10 - Kdo je pravým otcem telefonu, když ne Bell? Ilustrační snímek, 2020. In: Idnes.cz [online]. [cit. 2024-03-23]. Dostupné z: https://www.idnes.cz/technet/veda/sto-objevu-sveta-souboj-o-patent-telefon-technet-bell-meucci-americky-kongres.A200610_130201_veda_taj
- Obrázek 2.11 - Drugs-2-cover, 2018. In: WAidid [online]. [cit. 2024-03-23]. Dostupné z: https://www.waidid.org/publications/bedaquiline-containing-regimens-in-the-treatment-of-extensively-drug-resistant-tuberculosis
- Obrázek 2.12 - Large and Old Brick Industrial Building, 2023. In: The spruce [online]. [cit. 2024-03-23]. Dostupné z: https://www.thespruce.com/what-is-industrial-architecture-4796580
- Obrázek 3.3 - Balóny nad Rozkoší 2023, 2023. In: Kudy z nudy [online]. [cit. 2024-03-27]. Dostupné z: https://www.kudyznudy.cz/akce/25-balonu-letni-fiesta-horkovzdusnych-balonu-oko
- Obrázek 3.7 - A reactor at the Chernobyl power plant, 2022. In: CNN World [online]. [cit. 2024-03-28]. Dostupné z: https://edition.cnn.com/2022/03/11/europe/gallery/chernobyl-disaster/index.html

Seznam použité literatury

[1] BERRESFORD, Geoffrey C. a Andrew M. ROCKETT, 2015. Applied Calculus. 7th ed. Cengage Learning. ISBN 978-1-305-08531-2.

[2] BITTINGER, Marvin L., 2004. Calculus and It's Applications. 8th ed. Addison-Wesley. ISBN 0-321-16639-6.

[3] DOŠLÁ, Zuzana a KUBEN, Jaromír. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Brno: Masarykova univerzita, 2003. ISBN 80-210-3121-2.

[4] DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK, 1998. Nekonečné řady. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 80-210-1949-2.

[5] DOŠLÝ, Ondřej a Petr ZEMÁNEK, 2011. Integrální počet v R. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-5635-0.

[6] GREENSPAN, Harvey P. a BENNEY, David J. Calculus, an introduction to applied mathematics. 2nd ed. Toronto: McGraw-Hill Ryerson Limited, c1986. ISBN 0-07-548926-0.

[7] MIZRAHI, Abe a SULLIVAN, Michael. Mathematics: an applied approach. 6th ed. New York: John Wiley, 1996. ISBN 0-471-10701-8.

[8] NOVÁK, Vítězslav. Integrální počet v R. Vyd. 3. přeprac. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2720-7.

[9] PELAJOVÁ, Vlasta. *Interaktivní materiály k středoškolské matematické analýze* Online. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. 2019. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/shyh6/. [cit. 2024-03-20].

[10] VOLDÁNOVÁ, Anna. *Lineární diferenční rovnice prvního řádu a jejich aplikace* Online. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. 2009. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/a57t7/. [cit. 2024-03-28].

[11] WASSERBAUEROVÁ, Lenka. *Aplikace diferenciálního a integrálního počtu*. Online. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. 2015. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/mc5lm/. [cit. 2024-03-20].

[12] ZEMEK, Václav, Kristýna ZEMKOVÁ, Magda KRÁLOVÁ, Milan NAVRÁTIL a Petr KOZÁK, [2017-2020]. Matematika pro střední školy 9. díl. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-267-8.