

---

**A**

1. (5 b.) Rozhodněte, pro která přirozená čísla  $n$  platí  $65 \mid 4^n + 1$ . Své tvrzení řádně zdůvodněte.
2. (4 b.)
  - (a) Vypočtěte  $\varphi(10!)$  a  $\mu(10!)$ . (2)
  - (b) Řešte rovnici  $\varphi(p^x) = 6p^{x-2}$  ( $p$  prvočíslo,  $x \in \mathbb{N}_0$ ). (2)
3. (4 b.) Určete největšího společného dělitele čísel  $2^{91} - 1$  a  $2^{35} - 1$  a určete koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.
4. (4 b.) Řešte kongruenci  $744 \cdot x \equiv 318 \pmod{810}$ .
5. (3 b.) Určete, jaký zbytek dává číslo  $2007!$  po dělení prvočíslem 2011.

---

**B**

1. (5 b.) Rozhodněte, pro která přirozená čísla  $n$  platí  $35 \mid 3^n + 2$ . Své tvrzení řádně zdůvodněte.
2. (4 b.)
  - (a) Podrobně dokažte, že  $\sqrt{3}$  je iracionální číslo. (2)
  - (b) Popište všechna  $n \in \mathbb{N}$ , pro něž  $4 \nmid \varphi(n)$ . (2)
3. (4 b.) Určete největšího společného dělitele čísel  $3^{45} - 1$  a  $3^{65} - 1$  a určete koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.
4. (4 b.) Řešte kongruenci  $447 \cdot x \equiv 375 \pmod{486}$ .
5. (3 b.) Určete, jaký zbytek dává číslo  $2026!$  po dělení prvočíslem 2029.