A

1. (4 b.) Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ platí $13 \mid 3^{8^n} - 3^{n^8}$. Vše dokažte.
2. (5 b.) Šest loupežníků si chtělo rozdělit ukradené zlaťáky. Věděli, že jich mají něco mezi čtyřmi a šesti stovkami, ale paradoxně trvali na spravedlivém dělení. Když je rozdělovali na šest stejných hromádek, tři zlaťáky zbyly. Když je zkusili rozdělit na pět stejných hromádek, zbyl jeden zlaťák. Nakonec uspěli, protože se vrátil sedmý loupežník, který z kapsy jeden zlaťák přidal na stůl a všechny zlaťáky pak rozdělil na sedm stejných hromádek. Kolik zlaťáků dostal každý ze sedmi přítomných loupežníků?
3. (4 b.) Určete největšího společného dělitele čísel $2^{91} - 1$ a $2^{35} - 1$ a koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.
4. (4 b.)
   (a) Podrobně dokažte, že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo. (2)
   (b) Řešte rovnici $\varphi(pm) = \varphi(m)$ (p prvočíslo, $m \in \mathbb{N}$). (2)
5. (3 b.) Jsou-li p a $8p^2 + 1$ prvočísla, pak je i $8p^2 + 8p + 1$ prvočíslo. Dokažte.

B

1. (4 b.) Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ platí $13 \mid 7^{2^n} - 7^{n^2}$. Vše dokažte.

2. (5 b.) Když na Sokolském sletu vytvořili cvičenci osmistupy, zbývalo jich 6 navíc, při cvičení v kruzích o 9 lidech přebývali 2 a při tvorbě pyramid (na každou je potřeba 14 lidí), chyběli v poslední pyramidě 2 cvičenci. Kolik cvičenců se vystoupení zúčastnilo, když jich bylo více než 500 a méně než 1000?

3. (4 b.)

   (a) Definujte pojem „řád čísla modulo m“ a vypočtěte řád čísla 5 modulo 29. (2)

   (b) Popište všechna $n \in \mathbb{N}$, pro něž $4 \nmid \varphi(n)$. (2)

4. (4 b.) Určete největšího společného dělitele čísel $3^{45} - 1$ a $3^{65} - 1$ a určete koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.

5. (3 b.) Určete, jaký zbytek dává číslo 2026! po dělení prvočíslem 2029.