A

1. (5 b.) Dokažte, že je-li součet 5^n+3^n+1 prvočíslo, pak je přirozené číslo n dělitelné dvanácti. (Nápověda: zkoumejte, jaké zbytky dává uvedený výraz modulo vhodná přirozená čísla).

2. (5 b.) Rozhodněte (a stručně zdůvodněte), které z následujících kongruencí (resp. soustav kongruencí) jsou řešitelné.

   (a) $x \equiv -1 \pmod 3$
   $x \equiv 8 \pmod 9$

   (b) $4x \equiv 6 \pmod{12345678910}$

   (c) $x \equiv 3 \pmod{21}$
   $x \equiv 5 \pmod{91}$

   (d) $x^2 \equiv 4 \pmod{23}$
   $x^2 \equiv 1 \pmod{41}$

   (e) $x^2 \equiv 11 \pmod 7$
   $x^2 \equiv 7 \pmod{11}$

3. (4 b.)

   (a) Zformulujte Bezoutovu větu a aplikujte ji na čísla 1234 a 9876.

   (b) Určete počet řešení kongruence $1234x \equiv 6 \pmod{9876}$ a tuto kongruenci vyřešte.

4. (3 b.) Pro číslo $n = 6300$ určete **počet** a **součet** jeho kladných dělitelů a rovněž počet přirozených čísel $x \le n$, pro která $(x, n) = 1$.

5. (3 b.) Dokažte, že jsou-li a, b nesoudělná celá čísla, pak jsou nesoudělná také čísla a^2+ab+b^2, $a^2 - ab + b^2$.

B

1. (5 b.) Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n je číslo

$$2^{2^{6n+2}} - 16$$

je dělitelné číslem 37.

2. (5 b.) Rozhodněte (a stručně zdůvodněte), které z následujících kongruencí (resp. soustav kongruencí) jsou řešitelné.

(a) $x \equiv 1 \pmod 3$
$x \equiv -1 \pmod 9$

(b) $4x \equiv 1 \pmod{1234567891011}$

(c) $x \equiv 3 \pmod{23}$
$x \equiv 5 \pmod{41}$

(d) $x^2 \equiv 1 \pmod{23}$
$x^2 \equiv 4 \pmod{41}$

(e) $x^2 \equiv 11 \pmod 7$
$x^2 \equiv -7 \pmod{11}$

3. (4 b.)

(a) Zformulujte Bezoutovu větu a aplikujte ji na čísla 1234 a 8642.

(b) Určete počet řešení kongruence $1234x \equiv 6 \pmod{8642}$ a tuto kongruenci vyřešte.

4. (3 b.) Pro číslo $n = 6750$ určete **počet** a **součet** jeho kladných dělitelů a rovněž počet přirozených čísel $x \leq n$, pro která $(x, n) = 1$.

5. (3 b.) Dokažte, že jsou-li a, b nesoudělná celá čísla, pak jsou také čísla $a^3 + b^3$, $a^2 + ab + b^2$ nesoudělná.