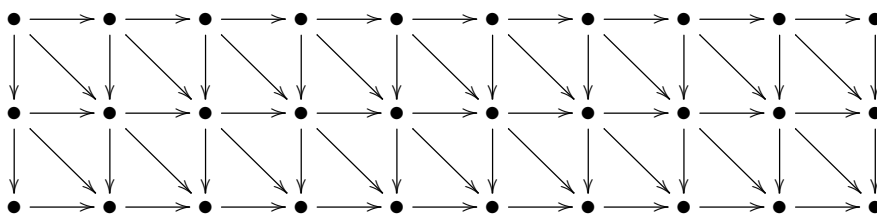


Domácí úkol z kombinatoriky, 2. prosince 2024

Přestože tento domácí úkol nebudete odevzdávat, měli byste si jej ve vlastním zájmu sepsat. Nezapomeňte vždy zapsat i úvahu, kterou jste k výsledku došli, způsobem, kterým byste svůj postup vysvětlili spolužákovi.

Vzorové řešení zadaných úloh bude uveřejněno v interaktivní osnově v pátek 6. prosince 2024, abyste si svůj domácí úkol mohli sami opravit.

1. Ve čtvercové síti je povoleno jít dolů, doprava a diagonálně vpravo dolů (viz náčrtek). Označme a_n , kde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, počet cest z daného startovního bodu do cílového bodu, který je o dvě délky strany čtverce níže a o n délek strany čtverce vpravo (náčrtek popisuje situaci pro $n = 9$).



Nalezněte rekurentní vztah pro výpočet členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ pomocí předchozích členů. Vypočtete a_{13} .

2. Rekurentní posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána svými počátečními hodnotami $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 4$, a rekurentním vztahem

$$b_{n+3} = 2b_{n+2} + b_{n+1} - 2b_n$$

platným pro každé přirozené číslo n . Nalezněte explicitní vyjádření členu b_n této posloupnosti, tj. vyjádření, ve kterém nebudou vystupovat jiné členy této posloupnosti (jedinou proměnnou bude n).

3. Ve hře Sportka se táhne z osudí, ve kterém je 49 míčků označených přirozenými čísly 1 až 49. Tah spočívá v tom, že se z osudí náhodně vylosuje 6 míčků (poté se losuje ještě jeden míček pro určení tzv. dodatkového čísla, které však v této úloze neuvažujeme). Určete, s jakou pravděpodobností bude v příštím tahu mezi vylosovanými šesti míčky alespoň jeden míček s číslem z množiny $\{10, 11, \dots, 19\}$, alespoň jeden míček s číslem z množiny $\{20, 21, \dots, 29\}$ a alespoň jeden míček s číslem z množiny $\{30, 31, \dots, 39\}$.