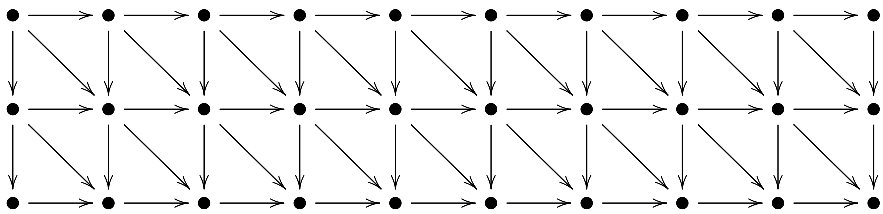
Domácí úkol z kombinatoriky, 2. prosince 2024

Přestože tento domácí úkol nebudete odevzdávat, měli byste si jej ve vlastním zájmu sepsat. Nezapomeňte vždy zapsat i úvahu, kterou jste k výsledku došli, způsobem, kterým byste svůj postup vysvětlili spolužákovi.

Vzorové řešení zadaných úloh bude uveřejněno v interaktivní osnově v pátek 6. prosince 2024, abyste si svůj domácí úkol mohli sami opravit.

1. Ve čtvercové síti je povoleno jít dolů, doprava a diagonálně vpravo dolů (viz náčrtek). Označme a_n, kde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, počet cest z daného startovního bodu do cílového bodu, který je o dvě délky strany čtverce níže a o n délek strany čtverce vpravo (náčrtek popisuje situaci pro $n = 9$).



   Nalezněte rekurentní vztah pro výpočet členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ pomocí předchozích členů. Vypočtěte a_{13}.

2. Rekurentní posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána svými počátečními hodnotami $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 4$, a rekurentním vztahem

$$b_{n+3} = 2b_{n+2} + b_{n+1} - 2b_n$$

   platným pro každé přirozené číslo n. Nalezněte explicitní vyjádření členu b_n této posloupnosti, tj. vyjádření, ve kterém nebudou vystupovat jiné členy této posloupnosti (jedinou proměnnou bude n).

3. Ve hře Sportka se táhne z osudí, ve kterém je 49 míčků označených přirozenými čísly 1 až 49. Tah spočívá v tom, že se z osudí náhodně vylosuje 6 míčků (poté se losuje ještě jeden míček pro určení tzv. dodatkového čísla, které však v této úloze neuvažujeme). Určete, s jakou pravděpodobností bude v příštím tahu mezi vylosovanými šesti míčky alespoň jeden míček s číslem z množiny $\{10, 11, \ldots, 19\}$, alespoň jeden míček s číslem z množiny $\{20, 21, \ldots, 29\}$ a alespoň jeden míček s číslem z množiny $\{30, 31, \ldots, 39\}$.

Vzorové řešení

1. Ze startovního bodu musíme vyjít jedním ze tří způsobů.

   Vyjdeme-li vpravo, dostaneme se do bodu, odkud můžeme pokračovat právě a_{n-1} různými cestami.

   Vyjdeme-li dolů, dostaneme se do bodu, ze kterého je cílový bod vzdálen o jednu délky strany čtverce níže a o n délek strany čtverce vpravo. Při pokračování cesty musíme tedy právě jednou jít buď dolů anebo jít diagonálně vpravo dolů, všechny ostatní kroky už budou vpravo. Šipek dolů je $n+1$, šipek vpravo dolů je n. Protože každá z těchto cest je jednoznačně určena tím, kterou z těchto $2n+1$ šipek použijeme, je počet cest, kterými můžeme pokračovat, roven $2n+1$.

   Vyjdeme-li diagonálně vpravo dolů, dostaneme se do bodu, ze kterého je cílový bod vzdálen o jednu délky strany čtverce níže a o $n-1$ délek strany čtverce vpravo. Podobně jako v předchozím případě odvodíme, že počet cest, kterými můžeme pokračovat, je roven $2n-1$.

   Z tohoto rozboru plyne rekurentní vztah $a_n = a_{n-1} + 4n$. Je zřejmé, že $a_0 = 1$.

   Užitím rekurentního vztahu postupně dostaneme

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + 4 \cdot 1 = 5,\\
a_2 &= a_1 + 4 \cdot 2 = 13,\\
a_3 &= a_2 + 4 \cdot 3 = 25,\\
a_4 &= a_3 + 4 \cdot 4 = 41,\\
a_5 &= a_4 + 4 \cdot 5 = 61,\\
a_6 &= a_5 + 4 \cdot 6 = 85,\\
a_7 &= a_6 + 4 \cdot 7 = 113,\\
a_8 &= a_7 + 4 \cdot 8 = 145,\\
a_9 &= a_8 + 4 \cdot 9 = 181,\\
a_{10} &= a_9 + 4 \cdot 10 = 221,\\
a_{11} &= a_{10} + 4 \cdot 11 = 265,\\
a_{12} &= a_{11} + 4 \cdot 12 = 313,\\
a_{13} &= a_{12} + 4 \cdot 13 = 365.
\end{aligned}
$$

   Hledané $a_{13} = 365$.

   Poznámka: Z rekurentního vztahu lze v tomto případě snadno získat explicitní vyjádření postupným dosazováním

$$a_n = 4n + 4(n-1) + 4(n-2) + \cdots + 8 + 4 + 1.$$

Tuto rovnost lze získat také takto: napíšeme získané rekurentní rovnosti od a_1 po a_n

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + 4 \cdot 1, \\ a_2 &= a_1 + 4 \cdot 2, \\ a_3 &= a_2 + 4 \cdot 3, \\ a_4 &= a_3 + 4 \cdot 4, \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 4 \cdot (n-1), \\ a_n &= a_{n-1} + 4 \cdot n. \end{aligned}$$

a po jejich sečtení odečteme od obou stran součet $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ a dosadíme za a_1.

Sečtením členů aritmetické posloupnosti pak dostaneme

$$a_n = 2n(n+1) + 1 = 2n^2 + 2n + 1.$$

Proto je možné vypočítat hledané a_{13} také dosazením do tohoto explicitního vyjádření: $a_{13} = 2 \cdot 13 \cdot 14 + 1 = 365$.

2. Protože jde o lineární rekurentní formuli třetího řádu s konstantními koeficienty, tvoří posloupnosti, které ji vyhovují, vektorový prostor dimenze 3. Charakteristický polynom je polynom, jehož kořeny jsou kvocienty $q \neq 0$ geometrických posloupností vyhovujících této formuli. Protože podmínka $q^{n+3} = 2q^{n+2} + q^{n+1} - 2q^n$ je splněna pro každé přirozené číslo n, právě když $q^3 = 2q^2 + q - 2$, je charakteristický polynom $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Přestože jde o polynom stupně 3, kořeny tohoto polynomu najdeme snadno, například uhádnutím některého z kořenů, anebo rozkladem $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$. Tento polynom tedy má jednoduché kořeny -1, 1, 2. Proto je daná posloupnost lineární kombinací posloupností $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$. Existují tedy čísla $u, v, w \in \mathbb{C}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = u \cdot (-1)^n + v + w \cdot 2^n.$$

Čísla u, v, w dostaneme porovnáním hodnot počátečních členů

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 = -u + v + 2w, \\ 0 &= b_2 = u + v + 4w, \\ 4 &= b_3 = -u + v + 8w. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic je $u = -1$, $v = -1$, $w = \frac{1}{2}$. Tím jsme dostali explicitní vyjádření b_n. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$b_n = -(-1)^n - 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1} - 1 - (-1)^n.$$

3. Výsledkem tahu sportky je jistá šestiprvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 49\}$, přičemž každá z těchto podmnožin má stejnou pravděpodobnost, že bude vylosována. Množina M všech tahů je tedy množina všech šestiprvkových podmnožin této množiny. Nechť N je podmnožina množiny M právě těch tahů, které splňují podmínku úlohy. Pak hledaná pravděpodobnost je rovna $\frac{|N|}{|M|}$.

   Zřejmě $|M| = \binom{49}{6}$.

   Počet prvků množiny N určíme pomocí principu inkluze a exkluze. Pro každé $i = 1, 2, 3$ označme M_i podmnožinu množiny M, jejímiž prvky jsou právě ty šestiprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, 49\}$, ve kterých není žádný prvek z množiny $\{10i, 10i + 1, \ldots, 10i + 9\}$. Pak $N = M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$.

   Snadno zjistíme, že $|M_1| = |M_2| = |M_3| = \binom{39}{6}$. Podobně $|M_1 \cap M_2| = |M_1 \cap M_3| = |M_2 \cap M_3| = \binom{29}{6}$, $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = \binom{19}{6}$.

   Princip inkluze a exkluze proto dává

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = \binom{49}{6} - 3 \cdot \binom{39}{6} + 3 \cdot \binom{29}{6} - \binom{19}{6}.$$

   Hledaná pravděpodobnost je proto

$$\frac{|N|}{|M|} = \frac{\binom{49}{6} - 3 \cdot \binom{39}{6} + 3 \cdot \binom{29}{6} - \binom{19}{6}}{\binom{49}{6}}.$$

   Kalkulačkou nebo na počítači lze spočítat, že

$$\tfrac{|N|}{|M|} = \tfrac{5593875}{13983816} = \tfrac{266375}{665896} \doteq 40\%.$$