

## SINOVÁ VĚTA

- (1) Dokažte, že pro obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  platí vzorce

$$\text{a) } S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}, \quad \text{b) } S = \frac{v_a^2 \sin \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma}, \quad \text{c) } S = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Vyjádřete rovněž obsah  $S$  pomocí výšek  $v_a, v_b$  a sinu úhlu  $\gamma$ .

- (2) Jsou dány přímky  $a, b$  protínající se v bodě  $O$  a bod  $P$  (různý od  $O$ ). Libovolná přímka  $p$  procházející bodem  $P$  protíná přímky  $a, b$  po řadě v bodech  $A, B$ . Dokažte, že hodnota poměru

$$\frac{|OA|}{|OB|} : \frac{|PA|}{|PB|}$$

nezávisí na volbě přímky  $p$ .

- (3) Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku  $ABC$  je označen  $S$ . Osa vnitřního úhlu u vrcholu  $B$  protíná stranu  $AC$  v bodě  $D$ , osa vnitřního úhlu u vrcholu  $C$  protíná stranu  $AB$  v bodě  $E$ , přitom platí  $|SD| = |SE|$ . Dokažte, že platí  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$  nebo je trojúhelník  $ABC$  rovnoramenný.
- (4) Ve vnitřní oblasti kružnice  $k$  se středem  $S$  je dán bod  $Q$  různý od bodu  $S$ . Určete bod  $P$  na kružnici  $k$  tak, aby byla velikost úhlu  $SPQ$  maximální.
- (5) Je dán konvexní čtyřúhelník  $ABCD$ . Předpokládejme, že polopřímky  $BA, CD$  se protínají v bodě  $K$  a polopřímky  $BC, AD$  v bodě  $M$ . Dokažte, že pro poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům  $ACM, BDK, ACK, BDM$  platí při zřejmém označení rovnost

$$r_{ACM} \cdot r_{BDK} = r_{ACK} \cdot r_{BDM}.$$

- (6) Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod  $D$  základny  $AB$  rovnoramenného trojúhelníku  $ABC$  jsou kružnice opsané trojúhelníkům  $ACD$  a  $BCD$  shodné.
- (7) Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ . Pro libovolný bod  $L$  jeho strany  $AB$  označme  $K, M$  paty kolmic z bodu  $L$  na strany  $AC, BC$ . Zjistěte, pro kterou polohu bodu  $L$  je úsečka  $KM$  nejkratší.
- (8) Patou výšky na libovolnou stranu trojúhelníku  $ABC$  vedme kolmice na zbývající dvě strany. Ukažte, že paty těchto dvou kolmic (tzv. druhotné paty původní výšky) mají pro všechny tři výšky stejnou vzdálenost rovnu  $S/r$ , kde  $S$  je obsah a  $r$  je poloměr kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ .
- (9) Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  je dán bod  $P$ . Označme  $A_P, B_P, C_P$  paty kolmic z bodu  $P$  po řadě na strany  $BC, AC, AB$ . Určete všechny body  $P$ , pro které je trojúhelník  $A_P B_P C_P$  podobný trojúhelníku  $ABC$ .
- (10) Čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami je vepsán do kružnice o poloměru  $r$ . Vyjádřete součet čtverců jeho stran pouze pomocí  $r$ .

- (11) Je dán trojúhelník  $ABC$ , ve kterém  $\gamma \geq \alpha$ . Na tom oblouku  $BC$  kružnice opsané, který neobsahuje bod  $A$ , je zvolen vnitřní bod  $P$ . Úsečka  $AP$  protíná stranu  $BC$  v bodě  $Q$ , polopřímka  $BP$  protíná polopřímku  $AC$  v bodě  $R$ . Dokažte, že hodnota výrazu

$$\frac{|CA| \cdot |CR| - |CB| \cdot |CQ|}{|CQ| \cdot |CR|}$$

nezávisí na volbě bodu  $P$ .

- (12) Středů oblouků  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  kružnice opsané danému trojúhelníku  $ABC$ , na nichž neleží po řadě body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , označme po řadě  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  a středy stran  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  označme po řadě  $K$ ,  $L$ ,  $M$ . Nechť  $S$  je střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Dokažte, že platí rovnost

$$|AS| \cdot |BS| \cdot |CS| = 8 \cdot |KP| \cdot |LQ| \cdot |MR|.$$

- (13) Je dán trojúhelník  $ABC$  ( $|AB| \neq |BC|$ ). Označme  $D$  průsečík přímky  $BC$  a tečny v bodě  $A$  ke kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . Kolmice k přímce  $BC$  vedené body  $B$ ,  $C$  protínají osy stran  $AB$ , resp.  $AC$  po řadě v bodech  $E$ ,  $F$ . Dokažte rovnost

$$\frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

(která bude znamenat, že body  $D$ ,  $E$ ,  $F$  leží v přímce).

- (14) Uvnitř strany  $AB$  daného ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  zvolte bod  $S$  tak, aby trojúhelník  $SXY$ , kde  $X$  a  $Y$  jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům  $ASC$  a  $BSC$ , měl nejmenší možný obsah.
- (15) V konvexním čtyřúhelníku  $ABCD$  je dáno  $|\sphericalangle CAB| = 50^\circ$ ,  $|\sphericalangle DBC| = 20^\circ$ ,  $|\sphericalangle ACD| = 40^\circ$ ,  $|\sphericalangle BDA| = 70^\circ$ . Určete velikost úhlu  $ASB$ , kde  $S$  je průsečík úhlopříček  $AC$  a  $BD$ . (Těžké! Možné velikosti jsou dvě.)

## KOSINOVÁ VĚTA

- (1) Určete, jakou podmínku splňují vnitřní úhly právě těch trojúhelníků  $ABC$ , pro jejichž strany platí

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}.$$

- (2) Základny lichoběžníku mají délky 3 a 12, jedno rameno má délku 2 a jedna úhlopříčka 12. Vypočítejte délku druhé úhlopříčky.
- (3) Uvnitř rovnostranného trojúhelníku  $ABC$  je bod  $P$  takový, že  $|PA| = 3$ ,  $|PB| = 4$ ,  $|PC| = 5$ . Určete délku strany trojúhelníku  $ABC$ .
- (4) Kružnice vepsaná trojúhelníku  $ABC$  se dotýká strany  $AB$  v bodě  $D$  takovém, že  $|AD| = 5$  a  $|DB| = 3$ . Určete délku strany  $BC$ , je-li  $\alpha = 60^\circ$ .

- (5) V rovnoběžníku  $ABCD$  je dáno:  $|AB| = a$ ,  $|AD| = b$  ( $b > a$ ),  $\sphericalangle BAD = \alpha$ , ( $\alpha < 90^\circ$ ). Na stranách  $AD, BC$  leží po řadě body  $K, M$  tak, že  $BMDK$  je kosočtverec. Kolik měří jeho strana?
- (6) Pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu  $C$  je vepsán do rovnostranného trojúhelníku  $PQR$  ( $A \in QR$ ,  $B \in PR$ ,  $C \in PQ$ ). Určete délku úsečky  $AQ$ , je-li dáno  $|PC| = 3$ ,  $|BP| = |CQ| = 2$ .
- (7) Šestiúhelník vepsaný do kružnice má tři sousedící strany délky  $a$  a zbylé tři sousedící strany délky  $b$ . Vyjádřete pomocí  $a, b$  poloměr  $r$  opsané kružnice.
- (8) V pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  s pravým úhlem u vrcholu  $A$  je přepona  $BC$  rozdělena body  $M, N$  na tři shodné úsečky ( $|BM| = |MN| = |NC|$ ). Vyjádřete délku úsečky  $MN$  pomocí délek  $x = |AM|$  a  $y = |AN|$ .
- (9) Délky těžnic libovolného trojúhelníku vyjádřete pomocí délek jeho stran.
- (10) Pro délky stran trojúhelníku  $ABC$  platí  $a^2 + b^2 = 5c^2$ , právě když jsou těžnice z vrcholů  $A, B$  navzájem kolmé. Dokažte.
- (11) Uvnitř jedné poloroviny s hraniční přímkou  $AB$  jsou dány dva různé body  $P$  a  $Q$ , ve druhé polorovině je nad průměrem  $AB$  sestrojena polokružnice. Určete ten její bod  $M$ , pro který součet  $|PM|^2 + |QM|^2$  nabývá největší hodnoty.
- (12) Označme  $O$  střed opsané kružnice a  $T$  těžiště libovolného trojúhelníku  $ABC$ , který není rovnostranný. Dokažte, že úsečky  $OT$  a  $CT$  jsou navzájem kolmé, právě když pro délky stran platí  $a^2 + b^2 = 2c^2$ .
- (13) Dokažte, že v lichoběžníku  $ABCD$  se základnami  $AB, CD$  platí

$$\frac{|AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2}{|CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2} = \frac{|AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2}{|CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

s výjimkou případů, kdy první nebo druhý zlomek nemá smysl – ukažte, že tehdy se jedná o zlomek  $0/0$ .

- (14) Dokažte, že v nerovnoramenném lichoběžníku  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) platí

$$\frac{|AC|^2 - |BD|^2}{|AD|^2 - |BC|^2} = \frac{|AB| + |CD|}{|AB| - |CD|}.$$

- (15) Je dán trojúhelník  $ABC$ . Nalezněte bod  $D$  na straně  $AC$  a bod  $E$  na straně  $AB$  tak, aby byl obsah trojúhelníku  $ADE$  roven obsahu čtyřúhelníku  $DEBC$  a délka úsečky  $DE$  byla minimální.
- (16) Je dána kružnice  $k(S; r)$  a na ní body  $M, N$  takové, že úhel  $MSN$  je ostrý. Libovolným bodem  $X$  menšího z oblouků  $MN$  vedme rovnoběžku s přímkou  $MS$  a označme  $Y$  její průsečík s úsečkou  $SN$ . Sestrojte takový bod  $X$ , pro který je obsah trojúhelníku  $SXY$  maximální.
- (17) Uvnitř trojúhelníku  $ABC$ , ve kterém  $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$  a  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ , je dán bod  $P$  tak, že  $|BP| = 4$ ,  $|CP| = 1$  a  $|\sphericalangle APB| = 120^\circ$ . Vypočítejte délku úsečky  $AP$ .

VŠECHNY PŘÍKLADY JSOU PŘEVZATY Z PARAGRAFŮ 2.7 A 2.8 DIZERTAČNÍ PRÁCE „METODY NEANALYTICKÝCH VÝPOČTŮ...“ AUTORKY BARBORY HAVÍŘOVÉ. JSOU TAM UVEDENA ROVNĚŽ JEJICH PODROBNÁ ŘEŠENÍ.