Stejnolehlost

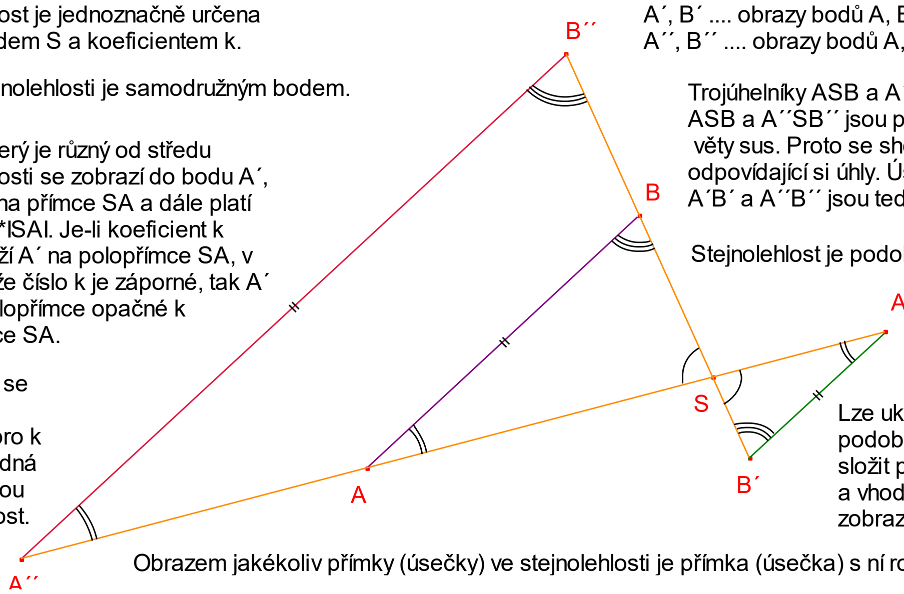
Vlastnosti zobrazení

Stejnolehlost je jednoznačně určena svým středem S a koeficientem k.

Střed stejnolehlosti je samodružným bodem.

Bod A, který je různý od středu stejnolehlosti se zobrazí do bodu A´, který leží na přímce SA a dále platí lSA´l = lkl*lSAl. Je-li koeficient k kladný, leží A´ na polopřímce SA, v případě, že číslo k je záporné, tak A´ leží na polopřímce opačné k polopřímce SA.

Pro k = 1 se jedná o identitu, pro k = -1 se jedná o středovou souměrnost.



A´, B´ .... obrazy bodů A, B pro k = -0,5
A´´, B´´ .... obrazy bodů A, B pro k = 2

Trojúhelníky ASB a A´SB´, resp. ASB a A´´SB´´ jsou podobné podle věty sus. Proto se shodují jejich odpovídající si úhly. Úsečky AB, A´B´ a A´´B´´ jsou tedy rovnoběžné.

Stejnolehlost je podobné zobrazení.

Lze ukázat, že každé podobné zobrazení lze složit pomocí stejnolehlosti a vhodných shodných zobrazení.

Obrazem jakékoliv přímky (úsečky) ve stejnolehlosti je přímka (úsečka) s ní rovnoběžná.

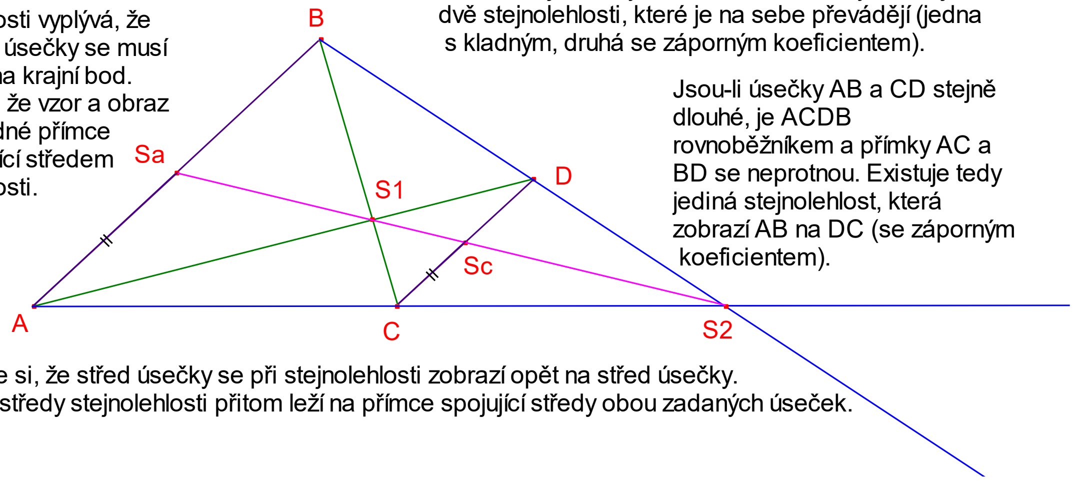
Stejnolehlost úseček

Kolik existuje stejnolehlostí, které na sebe zobrazují dvě rovnoběžné úsečky? Jak je najít?

Z rozboru vlastností stejnolehlosti vyplývá, že krajní bod úsečky se musí zobrazit na krajní bod. Dále platí, že vzor a obraz leží na jedné přímce procházející středem stejnolehlosti.

Krajní body obou úseček lze spojit dvěma způsoby (v obrázku modře a zeleně). V průsečíku příslušných přímek pak leží odpovídající střed stejnolehlosti.

Pokud mají úsečky AB a CD různé délky, existují dvě stejnolehlosti, které je na sebe převádějí (jedna s kladným, druhá se záporným koeficientem).

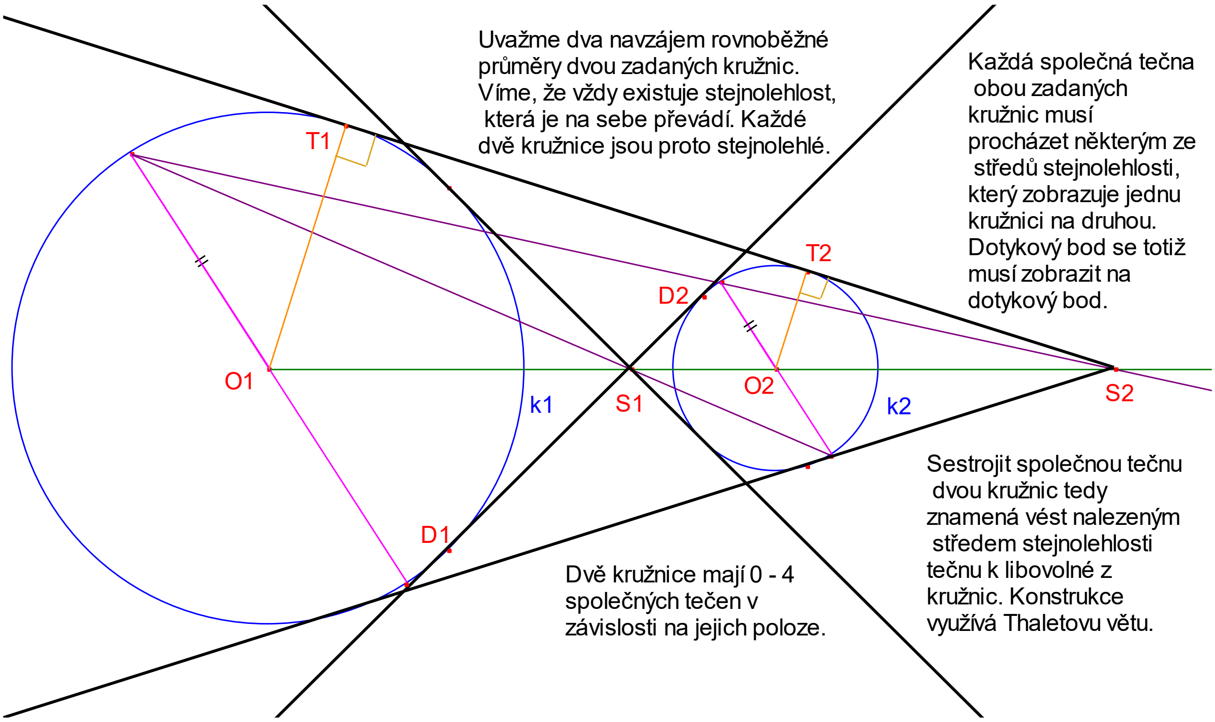


Jsou-li úsečky AB a CD stejně dlouhé, je ACDB rovnoběžníkem a přímky AC a BD se neprotnou. Existuje tedy jediná stejnolehlost, která zobrazí AB na DC (se záporným koeficientem).

Všimněme si, že střed úsečky se při stejnolehlosti zobrazí opět na střed úsečky.
Nalezené středy stejnolehlosti přitom leží na přímce spojující středy obou zadaných úseček.

Aleš Kobza

Stejnolehlost kružnic



Uvažme dva navzájem rovnoběžné průměry dvou zadaných kružnic. Víme, že vždy existuje stejnolehlost, která je na sebe převádí. Každé dvě kružnice jsou proto stejnolehlé.

Každá společná tečna obou zadaných kružnic musí procházet některým ze středů stejnolehlosti, který zobrazuje jednu kružnici na druhou. Dotykový bod se totiž musí zobrazit na dotykový bod.

Sestrojit společnou tečnu dvou kružnic tedy znamená vést nalezeným středem stejnolehlosti tečnu k libovolné z kružnic. Konstrukce využívá Thaletovu větu.

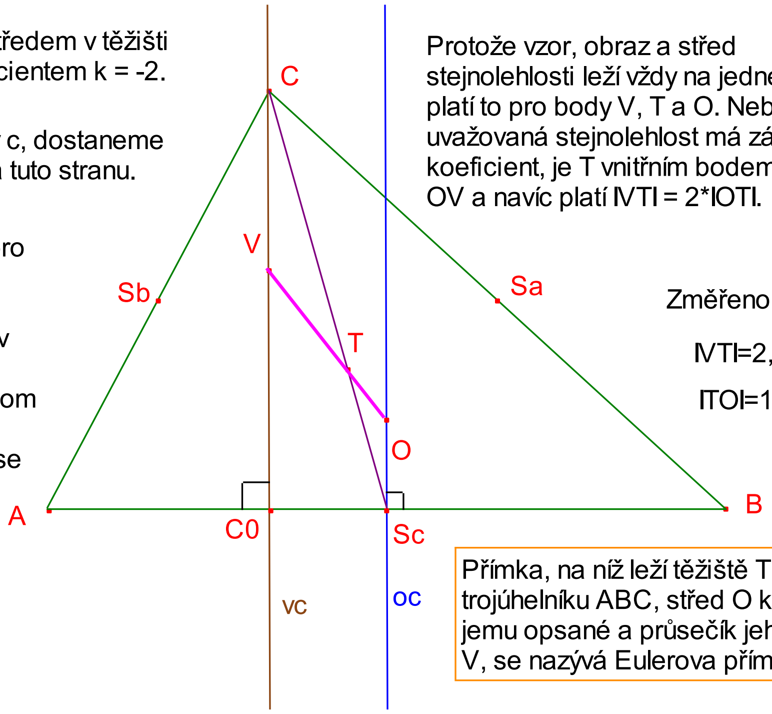
Dvě kružnice mají 0 - 4 společných tečen v závislosti na jejich poloze.

Eulerova přímka

Uvažme stejnolehlost se středem v těžišti T trojúhelníku ABC a koeficientem k = -2.

Zobrazíme-li v ní osu strany c, dostaneme přímku, na níž leží výška na tuto stranu.

Tuto úvahu lze zopakovat pro každou osu strany tohoto trojúhelníku. Protože se všechny osy stran protínají v jednom bodě O, musí se i jejich obrazy protínat v jednom bodě V. Toto dokazuje, že všechny výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě.



Protože vzor, obraz a střed stejnolehlosti leží vždy na jedné přímce, platí to pro body V, T a O. Neboť uvažovaná stejnolehlost má záporný koeficient, je T vnitřním bodem úsečky OV a navíc platí IVTI = 2*IOTI.

Změřeno:

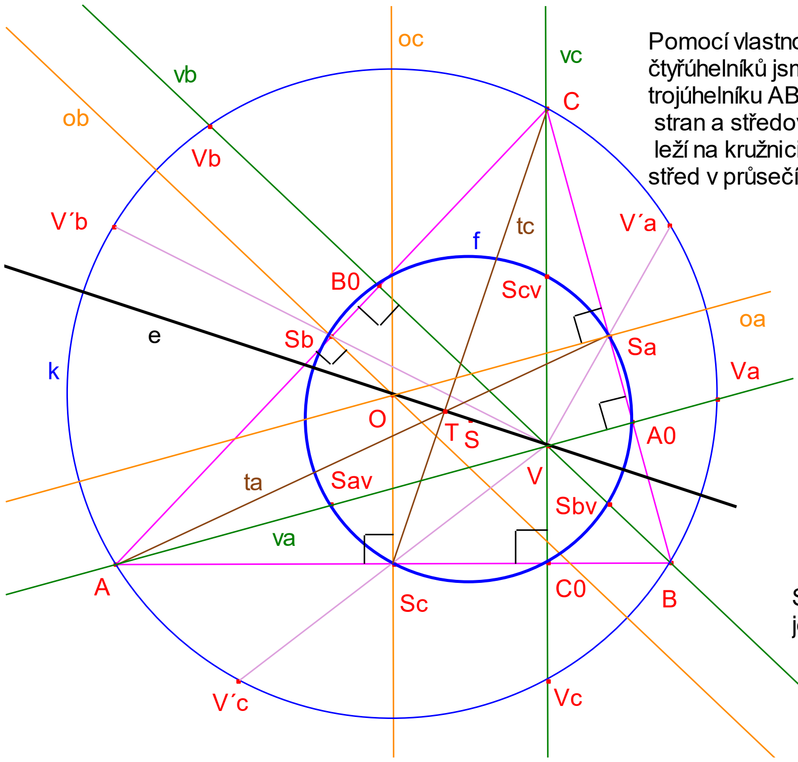
IVTI=2,00 cm

ITOI=1,00 cm

Přímka, na níž leží těžiště T trojúhelníku ABC, střed O kružnice jemu opsané a průsečík jeho výšek V, se nazývá Eulerova přímka.

Aleš Kobza

Feuerbachova kružnice



Pomocí vlastností obvodových úhlů a tětivových čtyřúhelníků jsme ukázali, že obrazy ortocentra V trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle jeho stran a středových souměrnostech podle středů stran, leží na kružnici k opsané trojúhelníku ABC, která má střed v průsečíku O os stan tohoto trojúhelníku.

Zobrazíme-li kružnici k ve stejnolehlosti se středem v bodě V a koeficientem k = 0,5, dostaneme kružnici f se středem v bodě S a polovičním poloměrem o proti kružnici k.

Kružnice f se nazývá Feuerbachova kružnice. Někdy se jí také říká kružnice devíti bodů, protože na ni může ležet až devět zajímavých bodů: středy stran trojúhelníku ABC, paty výšek a středy úseček spojujících jeho vrcholy s ortocentrem.

Střed S Feuerbachovy kružnice je tedy středem úsečky OV a leží proto na Eulerově přímce e.

Aleš Kobza